Roll No. ....

A

(20320)

B. A./B. Sc.-I

US-4186

B. A./B. Sc. (Annual) Examination, 2020

MATHEMATICS-I

Algebra and Trigonometry

(AB-126)

(Unified Syllabus)

Time : Three Hours] *[Maximum Marks : B.A. : 33, B.Sc. : 65*

Note : This paper is divided into five Sections A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these *ten* parts are compulsory. Sections-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt *one* question from each Section. Answer must be descriptive.

इस प्रश्न-पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द एवं इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

Section-A

खण्ड-अ

(Short Answer Questions)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

This Section contains one question of *ten* parts requiring short answers. Each part carries 1.3/2½ marks. 13/25

इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1.3/2½ अंकों का है।

1. (i) Using definition of the limit of a sequence, show that the limit of the sequence $<s_n>$, where $s_n = \dfrac{2n}{n+3}$, is 2.

   अनुक्रम की सीमा की परिभाषा का प्रयोग करते हुए दर्शाइए कि अनुक्रम $<s_n>$ की सीमा 2 है, जहाँ $s_n = \dfrac{2n}{n+3}$ है।

   (ii) State Cauchy's root test for infinite series.

   अनन्त श्रेणी के लिए कौशी के मूल परीक्षण का कथन लिखिए।

   (iii) Decompose the following permutation into transposition :

   निम्न क्रमचय को पक्षांतरण में विश्लेषित कीजिए :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(iv) Prove that the order of an element 'a' of a group is the same as that of its inverse a^{-1}.

सिद्ध कीजिए कि एक समूह के अवयव 'a' की कोटि वही होगी जैसी कि उसके व्युत्क्रम a^{-1} की है।

(v) State Cayley's theorem.

कैले के प्रमेय का कथन लिखिए ।

(vi) If $(R,+,\bullet)$ is a ring and $a,b,c \in R$ then show that :

यदि $(R,+,\bullet)$ एक वलय है तथा $a,b,c \in R$ तब दर्शाइए कि :

$$a.(-b) = (-a).b = -(ab).$$

(vii) Define normal subgroup.

प्रसामान्य उपसमूह को परिभाषित कीजिए।

(viii) Prove that :

सिद्ध कीजिए कि :

$$\sin h^{-1} z = \log\left[z + \sqrt{z^2 + 1}\right].$$

(ix) Prove that :

सिद्ध कीजिए कि :

$$\log(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right).$$

(x) Resolve $e^{\sin(x+iy)}$ into real and imaginary parts.

$e^{\sin(x+iy)}$ को वास्तविक एवं अधिकल्पित भागों में विघटित कीजिए।

Sections-B, C, D & E

खण्ड-ब, स, द एवं इ

(Descriptive Answer Questions)

(विस्तृत उत्तरीय प्रश्न)

Each Section contains two questions. Attempt *one* question from each Section. Each question carries 5/10 marks. Answer must be descriptive. 20/40

प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंकों का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

Section-B

खण्ड-ब

2. Test the convergence of the following series :

निम्न श्रेणियों की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए :

(a) $\sum\left[\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3}\right]$

(b) $2x+\frac{3x^2}{8}+\frac{4x^3}{27}+\ldots\ldots+\frac{(n+1)x^n}{n^3}+\ldots\ldots\infty$

3 (a) Prove that :

सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim\left[\frac{(\lfloor n)^{1/n}}{n}\right]=\frac{1}{e}$$

(b) Show that the series :

दर्शाइए कि श्रेणी :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right]$$

is semiconvergent.

अर्द्धअभिसारी है।

Section-C
खण्ड-स

4. (a) Prove that a necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a group G to be a subgroup is that :

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G के अरिक्त उपसमुच्चय H के उपसमूह होने की आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त है कि :

$$a\in H, b\in H \Rightarrow ab^{-1}\in H,$$

where b^{-1} is the inverse of b in G

जहाँ b^{-1}, G में b का व्युत्क्रम है।

(b) Prove that the set $G=\{1,2,3,4,5,6\}$ is a finite abelian group of order 6 with respect to multiplication modulo 7.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $G=\{1,2,3,4,5,6\}$ गुणात्मक मॉडुलो 7 के सापेक्ष, कोटि 6 का एक परिमित आबेलियन समूह है।

5. (a) Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक चक्रीय समूह का उपसमूह भी चक्रीय होता है।

(b) State and prove Lagrange's theorem.

लेग्रांज प्रमेय का कथन लिखकर उसे सिद्ध कीजिए।

Section-D

खण्ड-द

6. (a) Prove that intersection of two subrings is a subring.

सिद्ध कीजिए कि एक वलय के दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है।

(b) A ring R is without zero divisors, if and only if the cancellation laws hold in R.

एक वलय R शून्य भाजक रहित होता है, यदि और केवल यदि R में निरसन नियम लगते हों।

7. (a) If f is a homomorphism of a group G into a group G' with Kernel K, then prove that K is a normal subgroup of G.

यदि f समूह G से समूह G' में एक समाकारिता है। जिसकी अष्टि K है, तो सिद्ध कीजिए कि K, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

(b) Prove that the intersection of any two normal subgroups of a group is a normal subgroup.

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के किन्हीं दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

https://www.ccsustudy.com

Section-E

खण्ड-इ

8. (a) If $\sin(\alpha + i\beta) = x + iy$, prove that :

यदि $\sin(\alpha + i\beta) = x + iy$, सिद्ध कीजिए कि :

$$x^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha - y^2 \sec^2 \alpha = 1.$$

(b) Prove that :

सिद्ध कीजिए कि :

$$\log\left[\frac{1}{1-e^{i\alpha}}\right] = \log\left(\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

9. (a) If $\tan(\theta + i\phi) = \tan\alpha + i\sec\alpha$, then prove that :

यदि $\tan(\theta + i\phi) = \tan\alpha + i\sec\alpha$, तब सिद्ध कीजिए कि :

$$e^{2\phi} = \pm\cot\frac{\alpha}{2} \text{ and } 2\theta = n\pi + \frac{1}{2}\pi + \alpha.$$

(b) Sum the series of n terms :

श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए :

$$\tan^{-1}\frac{4}{1+3.4} + \tan^{-1}\frac{6}{1+8.9} + \tan^{-1}\frac{8}{1+15.16} + \ldots\ldots + \text{ to } n \text{ terms.}$$

https://www.ccsustudy.com