

B.A/B.Sc. I Year Examination, 2019 (Unified Syllabus)

Mathematics-III Geometry & Vector Calculus

Time : 3 Hrs.]

(AB-128)

[M.M. : 34/70

Note: इस प्रश्न पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित हैं। This paper is divided into Five Sections-A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these ten parts are compulsory. Sections-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt one question from each Section. Answer must be descriptive. **Section-A**

Note : इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1.4/3 अंक का है। This Section contains one question of ten parts requiring short answers. Each part carries 1.4/3 marks.

1. (i) शाकव $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ की नियता का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the directrix of a conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$.

(ii) समतल $lx + my + nz = p$ द्वारा पेरबोलोयड $ax^2 + by^2 = 2cz$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध लिखिए।
Write the condition that the plane $lx + my + nz = p$ may touch the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2cz$.

(iii) दिखाइये कि दो रेखाएँ जिनकी दिक् कोज्याएँ क्रमशः $l + m + n = 0$ तथा $2mn + 3ln - 5lm = 0$ हैं, तो उनके बीच का कोण समकोण है। Show that the line whose d.c.'s are given by $l + m + n = 0$ and $2mn + 3ln - 5lm = 0$ are at right angles.

(iv) उन समतलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतल $x - 2y + 2z - 3 = 0$ के समानान्तर तथा जो बिन्दु $(1, 2, 3)$ से इकाई दूरी पर हैं। Find the equations of the planes parallel to the plane $x - 2y + 2z - 3 = 0$ which are at a unit distance from the point $(1, 2, 3)$.

(v) बिन्दु $(1, 3, 4)$ का प्रतिबिम्ब निम्न समतल में ज्ञात करो : $2x - y + z + 3 = 0$.
Find the image of the point $(1, 3, 4)$ in the plane $2x - y + z + 3 = 0$.

- (vi) गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $2x + 3y + 4z = 5$ एवं बिन्दु $(1, 2, 3)$ से होकर गुजरता है।
Find the equation of the sphere through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $2x + 3y + 4z = 5$ and the point $(1, 2, 3)$.
- (vii) उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 5 तथा अक्ष y-अक्ष है।
Obtain the equation of the right circular cylinder of radius 5 whose axis is the y axis.
- (viii) सदिश $\vec{a}(t)$ का मापांक अचर होगा यदि और केवल यदि : The vector $\vec{a}(t)$ has a constant magnitude, if and only if :

$$\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0.$$

(ix) सिद्ध कीजिए : Prove that : $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0.$

(x) सिद्ध कीजिए : Prove that : $\nabla \times (\phi \vec{A}) = (\nabla \phi) \times \vec{A} + \phi (\nabla \times \vec{A}).$

Section-B

Note : प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। Each Section contains two questions. Attempt one question from each Section. Each question carries 5/10 marks. Answer must be descriptive.

2. शांकव का अनुरेखन कीजिए : Trace the conic : $36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0.$

3. सिद्ध कीजिये कि समतल $x + y + z = 0$ द्वारा दीर्घवृत्त $9x^2 + 6y^2 + 14z^2 = 3$ का काटा गया सेक्शन एक दीर्घवृत्त है जिसके अर्ध-अक्ष $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{3}{\sqrt{22}}$ है। उनके समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

Show that the section of the ellipsoid $9x^2 + 6y^2 + 14z^2 = 3$ by the plane $x + y + z = 0$ is an ellipse with semiaxes $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{\sqrt{22}}$. Also determine their equation.

Section-C

4. सिद्ध कीजिये कि रेखायें जिनकी दिक् कोज्याएँ प्रतिबन्धों $al + bm + cn = 0$ तथा $ul^2 + vm^2 + wn^2 = 0$ द्वारा दी गयी हैं, परस्पर लम्ब हैं, यदि $a^2(v+w) + b^2(u+w) + c^2(u+v) = 0$ तथा समान्तर हैं, यदि $\frac{a^2}{u} + \frac{b^2}{v} + \frac{c^2}{w} = 0.$

Show that the straight lines whose direction cosines are given by the equations $al + bm + cn = 0$ and $ul^2 + vm^2 + wn^2 = 0$ are perpendicular, if $a^2(v+w) + b^2(u+w) + c^2(u+v) = 0$ and parallel, if $\frac{a^2}{u} + \frac{b^2}{v} + \frac{c^2}{w} = 0.$

5. (a) एक समतल निर्देशांक अक्षों पर A, B, C से इस प्रकार मिलता है कि त्रिभुज ABC का केन्द्रक (p, q, r) है। दर्शाइये कि समतल का समीकरण $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 3$ है। A plane meets the coordinate axes in A, B, C such that the

centroid of triangle ABC is the point (p, q, r) . Show that the equation of the plane is $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 3.$

(b) एक चलित समतल जो स्थिर बिन्दु (α, β, γ) से होकर गुजरता है तथा अक्षों को क्रमशः A, B, C पर काटता है। दिखाइये कि समतल जो A, B, C से होकर गुजरते हैं तथा निर्देशांक समतलों के समानान्तर हैं, के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ $\alpha x^{-1} + \beta y^{-1} + \gamma z^{-1} = 1$ है। A variable plane passes through a fixed point (α, β, γ) and meets the axes of reference in A, B, C. Show that the locus of the point of intersection of the planes through A, B and C parallel to the co-ordinate planes is $\alpha x^{-1} + \beta y^{-1} + \gamma z^{-1} = 1$

Section-D

6. (a) उन दो समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से होकर गुजरते हैं व रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ के समानान्तर तथा जो इससे $\frac{5}{3}$ की दूरी पर हैं। Find the equations of the two planes through the origin which are parallel to the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ and distant $\frac{5}{3}$ from it.

(b) दो रेखाओं $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$; $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{-1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिये। न्यूनतम दूरी के रेखा के समीकरण भी ज्ञात कीजिए। Find the length of the shortest distance between the lines $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$; $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{-1}$ Also find its equations.

7. (a) सिद्ध कीजिए कि समतल $ax + by + cz = 0$ शंकु $yz + zx + xy = 0$ को लम्ब रेखाओं में काटता है यदि $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.
 Show that the plane $ax + by + cz = 0$ cuts the cone $yz + zx + xy = 0$ in the perpendicular lines if $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

(b) यदि PSP' कोनिक $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ की एक नाभीय जीवा है तो सिद्ध कीजिए कि P तथा P' पर स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण $\tan^{-1} \left(\frac{2e \sin \alpha}{1 - e^2} \right)$ है। जबकि जीवा अक्ष के साथ α कोण बनाती है।

If PSP' is a focal chord of a conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$; Prove that the angle between the tangents at P and P' is $\tan^{-1} \left(\frac{2e \sin \alpha}{1 - e^2} \right)$, where α is the angle chord makes with the axis. Section-E

8. (a) सिद्ध कीजिए : Prove that : $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$.

(b) सिद्ध कीजिए : Prove that : $\text{div}(r^n \vec{r}) = (n+3)r^n$.

9. (a) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}$ तथा xy समतल में वक्र C एक आयत है, जो $y=0, x=a, y=b, x=0$ से बँधा है। Evaluate : $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ Where $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}$ and curve C is the rectangle in the xy -plane bounded by $y=0, x=a, y=b, x=0$.

(b) ग्रीन के प्रमेय का प्रयोग करते हुए $\oint_C [(x^2 - \cosh y) dx + (y + \sin x) dy]$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि $C, x-y$ समतल में निम्न शीर्षों वाला एक आयत है : $(0, 0), (\pi, 0), (\pi, 1), (0, 1)$.

Evaluate by using Green's theorem : $\oint_C [(x^2 - \cosh y) dx + (y + \sin x) dy]$

Where C is the rectangle in $x-y$ plane with vertices : $(0, 0), (\pi, 0), (\pi, 1), (0, 1)$.