x, y, z subject to the ...

B.Sc. I Year Examination, 2018 *(Unified Syllabus)*

Mathematics-III Geometry & Vector Calculus

(AB-128)

Time : 3 Hrs.] **[M.M. : 34/70**

Note: इस प्रश्न पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। This paper is divided into Five Sections-A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these ten parts are compulsory. Sections-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt one question from each Section. Answer must be descriptive. **खण्ड-अ (Section-A)**

Note : इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1.4/3 अंक का है। This Section contains one question of ten parts requiring short answers. Each part carries 1.4/3 marks.

1. (i) दिखाइये कि समीकरण : $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$ एक अतिपरवलय प्रदर्शित करती है।
Show that the equation $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$ represents a hyperbola.

(ii) शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ की नियता का समीकरण ज्ञात कीजिए।
Find the equation of directrix of a conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$.

(iii) एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्यबिन्दु (1, 5, –1), (0, 4, –2) तथा (2, 3, 4) हैं। इसके शीर्षों को ज्ञात कीजिए।
The midpoints of the sides of a triangle are (1, 5, –1), (0, 4, –2) and (2, 3, 4). Find its vertices.

(iv) सिद्ध कीजिए कि यदि l_1, m_1, n_1 तथा l_2, m_2, n_2 दो रेखाओं की दिक्-कोज्याएँ हैं तथा इनके बीच का कोण θ हैं, तो $\cos\theta = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$ होगा। To prove that if l_1, m_1, n_1 and l_2, m_2, n_2 are the direction cosines of two lines and θ is the angle between them, then $\cos\theta = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$.

(v) बिन्दुओं $(1, -2, 2), (-3, 1, -2)$ से होकर तथा समतल $x + 2y - 3z = 5$ के लम्बवत् समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।
Find the equation of the plane through the points $(1, -2, 2), (-3, 1, -2)$ and perpendicular to the plane $x + 2y - 3z = 5$.

(vi) दिखाइये कि समतल $2x - 2y + z + 12 = 0$ गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ को स्पर्श करता है।
Show that the plane $2x - 2y + z + 12 = 0$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$.

(vii) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके जनक z- अक्ष के समान्तर हैं तथा वक्र $ax^2 + by^2 = 2cz, lx + my + nz = p$ से होकर जाता है। Find the equation of the cylinder with generators parallel to z-axis and passing through the curve $ax^2 + by^2 = 2cz, lx + my + nz = p$.

(viii) यदि सदिश $\bar{a}(t)$ की दिशा अचर है, तोः If vector $\bar{a}(t)$ has a constant direction, तो then : $\bar{a} \times \frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{0}$.

(ix) curl $\bar{f}$, निकालिए, यदि $\bar{f} = z^2\hat{i} + x^2\hat{j} + y^2\hat{k}$. Find curl $\bar{f}$, if $\bar{f} = z^2\hat{i} + x^2\hat{j} + y^2\hat{k}$.

(x) दिया है किः Given that :

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}, & t = 2 \\ 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}, & t = 3 \end{cases}$$

दिखाइये कि : Show that :

$$\int_2^3 \left(\bar{r} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}\right) dt = 10.$$

खण्ड-ब (Section-B)

Note : प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। Each Section contains two questions. Attempt one question from each Section. Each question carries 5/10 marks. Answer must be descriptive.

2. एक रेखा घन के चार विकर्णों के साथ कोण $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ बनाती है, तो दर्शाइये कि : A line makes angles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ with four diagonals of a cube, show that : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}$.

अथवा

3. एक चलित समतल दिये हुए समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ के समान्तर है तथा अक्षों को क्रमशः A, B, C पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि वृत्त ABC सतह :

$$yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 0.$$

पर स्थित है।

A variable plane is parallel to the given plane $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$ and meets the axis is A, B, C respectively. Prove that the circle ABC lies on the surface.

$$yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=0.$$

खण्ड-स (Section-C)

4. एक चलित समतल जो मूलबिन्दु से नियत दूरी p पर है तथा अक्षों से A, B तथा C पर मिलता है। दिखाइये कि त्रिभुज ABC के केन्द्रक का बिन्दुपथ $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=9p^{-2}$ है। A variable plane at a constant distance p from the origin meets the axes in A, B and C. Show that the locus of the centroid of the triangle ABC is $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=9p^{-2}$.

अथवा

5. सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $\frac{x-9}{2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-5}{1}$ तथा $6x+4y-5z=4, x-5y+2z=12$ समतलीय हैं। इनका प्रतिच्छेद बिन्दु तथा उस समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिए जिस पर ये रेखाएँ स्थित हैं।
Prove that the lines $\frac{x-9}{2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-5}{1}$ and $6x+4y-5z=4, x-5y+2z=12$ are coplanar. Find also their point of intersection and the equation of the plane in which they lie.

खण्ड-द (Section-D)

6. दिखाइये कि शंकु $\sqrt{fx}\pm\sqrt{gy}\pm\sqrt{hz}=0$ का व्युत्क्रम शंकु $fyz+gzx+hxy=0$ है।
Show that the reciprocal cone of the cone $\sqrt{fx}\pm\sqrt{gy}\pm\sqrt{hz}=0$ is $fyz+gzx+hxy=0$.

अथवा

7. सिद्ध कीजिए कि div grad $(r^n)=n(n+1)r^{n-2}$ है।
Prove that div grad $(r^n)=n(n+1)r^{n-2}$.

खण्ड-इ (Section-E)

8. केन्द्रीय शांकव $ax^2+by^2+cz^2=1$ के बिन्दु (α,β,γ) पर स्पर्शी समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। Find the equation of the tangent plane to the central conicoid $ax^2+by^2+cz^2=1$ at the point (α,β,γ).

अथवा

9. किसी शांकव में, सिद्ध कीजिए कि दो लम्बवत् नाभीय जीवाओं के व्युत्क्रमों का योग एक स्थिरांक होता है।
In any conic, prove that the sum of the reciprocals of two perpendicular focal chords is constant.