B.A/B.Sc. I Examination, 2017 (*Unified Syllabus*)
Mathematics-III Geometry & Vector Calculus

Time : 3 Hrs.] **(AB-128)** **[M.M. : 34/70**

Note : इस प्रश्न-पत्र को पाँच खण्डों -अ, ब, स, द तथा इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।This paper is divided into five Sections-A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these ten parts are compulsory. Sections-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt one question from each Section. Answer must be descriptive.

खण्ड-अ (Section-A)

इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित है। प्रत्येक भाग 1.4/3 अंक का है।

This Section contains one question of ten parts requiring short answers. Each part carries 1.4/3 marks.

1.(i) दर्शाइए कि द्विघात समीकरण : $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x - 10y - 7 = 0$ एक दीर्घवृत्त प्रदर्शित करती है।
Show that the equation of second degree $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x - 10y - 7 = 0$ represents an ellipse.

(ii) शांकव $\frac{14}{r} = 3 - 8\cos\theta$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जिसका त्रिज्य सदिश 2 है।
Find the point on the conic $\frac{14}{r} = 3 - 8\cos\theta$ whose radius vector is 2.

(iii) दिखाइये कि तीन बिन्दु A (2, —1, 3),B (4, 3, 1) तथा C (3, 1, 2) संरेखीय है।
Show that the three points A (2, —1, 3), B (4, 3, 1) and C (3, 1, 2) are collinear.

(iv) सिद्ध कीजिए कि तीन संकेन्द्रीय रेखाएँ जिनकी दिक् कोज्याएँ $l_1, m_1, n_1; l_2 m_2, n_2$ तथा l_3, m_3, n_3 हैं, समतलीय होंगी यदि
Prove that the three concurrent lines with direction cosines $l_1, m_1, n_1; l_2 m_2, n_2$ and l_3, m_3, n_3 are coplanar if : $\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0$

(v) समतलों $2x - y + z = 6$ तथा $x + y + 2z = 7$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।
Find the angle between the planes $2x - y + z = 6$ and $x + y + 2z = 7$.

(vi) यदि रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-a}{c}$ समतल $3x - y + 4z = 7$ के समान्तर है, तो c ज्ञात कीजिए।
If the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-a}{c}$ is parallel to the plane $3x - y + 4z = 7$, then find c.

(vii) शांकव $3x^2 - 5y^2 + z^2 + 2 = 0$ के बिन्दु (1,1,0) पर स्पर्शी तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।
Find the equation of the tangent plane to the conicoid $3x^2 - 5y^2 + z^2 + 2 = 0$ at the point (1, 1, 0).

(viii) यदि $\vec{r} = e^{nt}\vec{a} + e^{-nt}\vec{b}$, जहाँ $\vec{a}, \vec{b}$ अचर सदिश हैं, दिखाइए कि : $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - n^2\vec{r} = \vec{0}$
If $\vec{r} = e^{nt}\vec{a} + e^{-nt}\vec{b}$, where $\vec{a}, \vec{b}$ are constant vectors, show that : $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - n^2\vec{r} = \vec{0}$

(ix) यदि $\vec{a}$ अदिश चर t का एक अवकलनीय सदिश फलन है, तो :
If $\vec{a}$ is a differentiable vector function of the scalar variable t, then :

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a} \times \frac{d\vec{a}}{dt}\right) = \vec{a} \times \frac{d^2\vec{a}}{dt^2}.$$

(x) सिद्ध कीजिए कि $\text{curl}\,\vec{r} = \vec{0}$. Prove that $\text{curl}\,\vec{r} = \vec{0}$.

CS Scanned with CamScanner

खण्ड-ब, स, द एवं इ (Sections-B, C, D & E)

प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। Each Section contains two questions. Attempt one question from each Section.Each question carries 5/10 marks. Answer must be descriptive.

खण्ड-ब (Section-B)

2. एक बिन्दु $P(x', y' z')$ से OP के लम्बवत् एक समतल खींचा गया है जो अक्षों को A, B तथा C पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $\frac{r^5}{2x' y' z'}$ है, जहाँ r रेखाखण्ड OP की लम्बाई है तथा मूलबिन्दु O है। From a point $P(x', y' z')$ a plane is drawn at right angles to OP to meet the coordinate axes at A, B and C. Prove that the area of the triangle ABC is $\frac{r^5}{2x' y' z'}$, where r is the measure of OP and O is the origin.

3. दिखाइए कि रेखा $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, x=0$ से होकर जाने वाले तथा रेखा $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=1, y=0$ के समान्तर समतल का समीकरण $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+1=0$ है तथा यदि 2d न्यूनतम दूरी है, तो दिखाइए कि : $d^{-2}=a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}$. Show that the equation of the plane containing the line $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, x=0$ and parallal to the line $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=1, y=0$ is $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+1=0$ and if 2d is the shortest distance, then show that : $d^{-2}=a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}$.

खण्ड-स (Section-C)

4. एक गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके लिए वृत्त $x^2+y^2+z^2+7y-2z+2=0, 2x+3y+4z=8$ एक वृहद वृत्त है। Find the equation of a sphere for which the circle $x^2+y^2+z^2+7y-2z+2=0, 2x+3y+4z=8$ is a great circle.

5. लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 2 तथा जिसकी अक्ष, रेखा $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{1}$ है। Find the equation of the right circular cylinder of radius 2 and whose axis is the line : $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{1}$.

खण्ड-इ (Section-D)

6. OX तथा OY से जाने वाले समतलों के बीच का कोण α है। दिखाइए कि उनके द्वारा काटी गई रेखा शंकु : Planes through OX and OY include an angle α Show that their line of intersection lies on the cone : $z^2(x^2+y^2+z^2)=x^2 y^2 \tan^2\alpha$ पर स्थित है।

7. बिन्दु (1, –2, –1) पर सदिश $2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}$ की दिशा में $f(x, y, z)=x^2 yz+4xz^2$ का दिशीय अवकल ज्ञात कीजिए। Find the directional derivative of $f(x, y, z)=x^2 yz+4xz^2$ at the point (1, –2, –1) in the direction of the vector $2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}$.

खण्ड-इ (Section-E)

8. वक्र $C: x^2+y^2=1, z=1$ के अनुदिश $\int \vec{F}.d\vec{r}$ का मान (0, 1, 1) से (1, 0, 1) तक धनात्मक दिशा में ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$\vec{F}(x, y, z)=(2x+yz)\hat{i}+xz\hat{j}+(xy+2z)\hat{k}$$

Evaluate $\int \vec{F}.d\vec{r}$ along the curve $C: x^2+y^2=1, z=1$ in the positive direction from (0, 1, 1) to (1, 0, 1), where. $\vec{F}(x, y, z)=(2x+yz)\hat{i}+xz\hat{j}+(xy+2z)\hat{k}$

9. यदि एक चलित रेखा की दो सन्निकट स्थितियों की दिक् कोज्याएँ l, m, n तथा $l+\delta l, m+\delta m, n+\delta n$ हैं, तो दिखाइए कि इन दोनों स्थितियों के बीच का सूक्ष्म कोण $\delta\theta$ निम्न से दिया है : If a variable line in two adjacent positions has direction cosines l, m, n and $l+\delta l, m+\delta m, n+\delta n$, then show that the small angle $\delta\theta$ between two positions is given by : $(\delta\theta)^2=(\delta l)^2+(\delta m)^2+(\delta n)^2$.