

B.A/B.Sc. I Examination, 2016 (Unified Syllabus)

Mathematics-III Geometry & Vector Calculus

Time : 3 Hrs.]

(AB-128)

[M.M. : 34/70

Note : इस प्रश्न-पत्र को पाँच खण्डों -अ, ब, स, द तथा इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। This paper is divided into five Sections-A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these ten parts are compulsory. Sections-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt one question from each Section. Answer must be descriptive.

खण्ड-अ (Section-A)

इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1.4/3 अंक का है।

This Section one question of ten part requiring short answers. Each part carries 1.4/3 marks.

1.(i) किसी शाकव $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ पर बिन्दु ' α ' से खींची गई स्पर्शी का ढाल ज्ञात कीजिए।

Find the slope of the tangent to the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ at the point ' α ' on it.

(ii) बिन्दु P (2, 3, -6) एवं बिन्दु Q (3, -4, 5) को मिलाने वाले रेखाखण्ड की दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।
Find the direction cosines of the line segment joining the points P (2, 3, -6) and Q (3, -4, 5).

(iii) दो समानान्तर समतलों $2x - y + 3z - 4 = 0$, $6x - 3y + 9z + 13 = 0$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
Find the distance between the parallel planes $2x - y + 3z - 4 = 0$ and $6x - 3y + 9z + 13 = 0$.

(iv) उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ रेखा $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$, समतल $x - 2y + z = 20$ से मिलती है।

Find the point in which the line $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$, meets the plane $x - 2y + z = 20$.

(v) गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $2x + 3y + 4z = 5$ एवं बिन्दु (1, 2, 3) से होकर गुजरता है।
Find the equation of the sphere through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $2x + 3y + 4z = 5$ and the point (1, 2, 3).

(vi) उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (0, 0, 0) है तथा जो वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 3z = 9$, $x - y + z = 3$ से गुजरता है। Find the equation of the cone with vertex at (0, 0, 0) and passes through the circle given by $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 3z = 9$; $x - y + z = 3$.

(vii) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जो X-अक्ष के समानान्तर हो एवं वक्र $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ एवं $lx + my + nz = p$ को काटता है। Find the equation of the cylinder with generators parallel to X-axis and intersects the curve $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and $lx + my + nz = p$.

(viii) यदि $\vec{r} = \sin t \hat{i} + \cos t \hat{j} + t \hat{k}$, तो सिद्ध कीजिए कि : If $\vec{r} = \sin t \hat{i} + \cos t \hat{j} + t \hat{k}$, then prove that :

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{2}, \left| \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right| = 1.$$

(ix) यदि $f(x, y, z) = x^3 - y^3 + xz^2$, तो बिन्दु (1, -1, 2) पर ∇f (grad f) का मान ज्ञात कीजिए।

If $f(x, y, z) = x^3 - y^3 + xz^2$, Find ∇f at the point (1, -1, 2).

(x) यदि $\vec{f} = x^2 y \hat{i} - 2xz \hat{j} + 2yz \hat{k}$, तो $\text{curl } \vec{f}$ का मान ज्ञात कीजिए।

if $\vec{f} = x^2 y \hat{i} - 2xz \hat{j} + 2yz \hat{k}$, then find the value of $\text{curl } \vec{f}$.

खण्ड-ब, स, द एवं इ (Section-B, C, D & E)

प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। Each Section contains two questions. Attempt one question from each Section. Each question carries 5/10 marks. Answer must be descriptive.

खण्ड-ब (Section-B)

2. एक समतल, अक्ष को A, B, C पर इस प्रकार काटता है कि त्रिभुज ABC का केन्द्र (p, q, r) है। दिखाइए कि समतल की समीकरण $\frac{x}{3p} + \frac{y}{3q} + \frac{z}{3r} = 1$ है। A plane meet the coordinate axis in A, B, C such that the centroid of triangle ABC is the point (p, q, r). Show that the equation of a plane is $\frac{x}{3p} + \frac{y}{3q} + \frac{z}{3r} = 1$.

अथवा

3. रेखाओं $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-7}{1}$; $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{-1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। न्यूनतम दूरी का समीकरण भी ज्ञात कीजिए। Find the length of the shortest distance between the lines $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-7}{1}$; $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{-1}$. Find also its equations.

खण्ड-स (Section-C)

4. एक समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ अक्षों पर बिन्दु A, B, C से मिलता है। सिद्ध कीजिए कि उस शंकु का समीकरण जिसकी जनक रेखाएँ जो मूलबिन्दु से खींची गई हैं एवं वृत्त ABC पर मिलती हैं, है :
The plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ meets the coordinate axis in A, B, C. Prove that the equation to the cone generated by the lines drawn from origin O to meet the circle ABC, is :

$$yz \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + zx \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + xy \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = 0.$$

अथवा

5. प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जब दो गोले : Obtain the condition that the spheres :
 $a(x^2 + y^2 + z^2) + 2lx + 2my + 2nz + p = 0$ and $b(x^2 + y^2 + z^2) = k^2$ ऑरथोगोनली काटते हैं। may cut orthogonally.

खण्ड-द (Section-D)

6. उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ पर रेखा: $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-12}{5} = \frac{z-7}{2}$ पृष्ठ $11x^2 - 5y^2 + z^2 = 0$ को काटता है।
Find the points in which the line : $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-12}{5} = \frac{z-7}{2}$ cuts the surface $11x^2 - 5y^2 + z^2 = 0$.

अथवा

7. स्टोक्स प्रमेय द्वारा निम्न का मान ज्ञात कीजिए : Evaluate by Stokes' theorem : $\oint_C (yzdx + xzdy + xydz)$, जहाँ where C एक वक्र is the curve $x^2 + y^2 = 1, z = y^2$.

खण्ड-इ (Section-E)

8. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, को हल कीजिए, जहाँ $\vec{F} = x^2 y^2 \hat{i} + y \hat{j}$ एवं C, xy- समतल में बिन्दु (0, 0) से (4, 4) तक वक्र $y^2 = 4x$ है।
Evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, where \vec{F} is $x^2 y^2 \hat{i} + y \hat{j}$ and C is $y^2 = 4x$ in the xy-plane from (0, 0) to (4, 4).

अथवा

9. सिद्ध कीजिए कि $\nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) = 0$ अथवा $\text{div} \left(\text{grad} \frac{1}{r} \right) = 0$ है। Prove that $\nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) = 0$ or $\text{div} \left(\text{grad} \frac{1}{r} \right) = 0$.