

B.Sc. I Year Examination, 2013 (Unified Syllabus)

MATHEMATICS - III

(Geometry & Vector Calculus)

Time: 3 Hours]

(AB-128)

[M.M.: B.A. 34/B.Sc. 70

Note: This paper is divided into two Sections-A, and B. Section-A contains Short Answer Questions and Section-B contains Descriptive Answer Question. Attempt all the Section as per instruction. इस प्रश्न-पत्र को दो खण्डों- अ तथा ब में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ में लघु उत्तरीय तथा खण्ड-ब में विस्तृत उत्तरीय प्रश्न हैं। सभी खण्डों को निर्देशानुसार हल कीजिए।

Section-A

Note: In this Section Q. No. 1 contains ten parts, all parts are compulsory. Each part carries 1.4/3 marks. इस खण्ड में प्रश्न सं. 1 के दस भाग हैं, सभी भाग अनिवार्य हैं। प्रत्येक भाग 1.4/3 अंक का है।

- (i) Find the equation of the asymptotes of the conic $7x^2 + 52xy - 32y^2 - 170x + 140y = 0$.
शांकव $7x^2 + 52xy - 32y^2 - 170x + 140y = 0$ की अनन्तस्पर्शियों का समीकरण ज्ञात कीजिए।
- (ii) Find the point on the conic $\frac{14}{r} = 3 - 8\cos\theta$ whose radius vector is 2. शांकव $\frac{14}{r} = 3 - 8\cos\theta$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जिसका त्रिज्य सदृश 2 है।
- (iii) Find the acute angle between two lines whose direction cosines are given by the relations: उन दो रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जिसकी दिक् क्रोज्याएँ निम्न सम्बन्धों द्वारा दी गयी हैं:
$$l+m+n=0, l^2+m^2-n^2=0.$$
- (iv) Find the area of a triangle whose vertices are (1,2,3), (2,-1,1) and (1,2,-4).
उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (1, 2, 3), (2, -1, 1) तथा (1, 2, -4) हैं।
- (v) Find the equation of the sphere which passes through the point (α, β, γ) and the circle $x^2 + y^2 = a^2, z=0$.
बिन्दु (α, β, γ) तथा वृत्त $x^2 + y^2 = a^2, z=0$ से होकर जाने वाले गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए।
- (vi) Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ and the guiding curve is the ellipse $x^2 + 2y^2 = 1, z=3$. उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी जनक रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ के समानान्तर है तथा जिसका आधार वक्र दीर्घवृत्त $x^2 + 2y^2 = 1, z=3$ है।
- (vii) Find the equation of the tangent plane to the conicoid $3x^2 - 5y^2 + z^2 + 2 = 0$ at the point (1, 1, 0).
शांकव $3x^2 - 5y^2 + z^2 + 2 = 0$ के बिन्दु (1, 1, 0) पर स्पर्शतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।
- (viii) Show that the plane $x+2y+3z=2$ touches the conicoid $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 2$.
दिखाइए कि समतल $x+2y+3z=2$ शांकव $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 2$ को स्पर्श करता है।
- (ix) The vector $\vec{a}(t)$ has a constant magnitude. If and only if $\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$.
सदिश $\vec{a}(t)$ का मापांक अचर होगा यदि और केवल यदि $\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$.
$$\vec{a} = t\hat{i} - 3\hat{j} + 2t\hat{k}$$
$$\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$
$$\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$
- (x) If: यदि:
then find the value of: तो ज्ञात कीजिए: $\int_0^1 \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) dt$.

Section-B

Unit-I

Note: This Section contains four Units. Attempt one question from each Unit. Each question carries 5/10 marks.
इस खण्ड में चार इकाई हैं। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न हल कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है।

2. Trace the hyperbola: अतिपरवलय को निरूपित कीजिए: $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 26x - 22y + 43 = 0$.

3. Prove that: सिद्ध कीजिए कि: $\text{div}\left(\text{grad}\frac{1}{r}\right) = 0$.

Unit-II

4. Prove that the lines $\frac{x-9}{2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-5}{1}$ and $6x+4y-5z=4$, $x-5y+2z=12$ are coplaner. Find also their point of

intersection and the equation of the plane in which they lie. दिखाइए कि रेखाएँ $\frac{x-9}{2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-5}{1}$ तथा

$6x+4y-5z=4$, $x-5y+2z=12$ समतलीय हैं, इनका प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए तथा उस समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिए जो इन रेखाओं को रखता है।

5. A variable plane is at a constant distance p from the origin and meets the axis in A , B and C . Show that the locus of the centroid of triangle ABC is $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = 9p^{-2}$. एक चर समतल मूलबिन्दु से p दूरी पर है तथा अक्षों को A , B , C बिन्दुओं पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज A, B, C के केन्द्रक का बिन्दुपथ $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = 9p^{-2}$ होगा।

Unit-III

6. Reduce the equation: समीकरण: $2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$ to the standard form. को मानक रूप में लिखिए।

7. Find the radius and centre of the circle of intersection of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - yz = 11$ and the plane $x + 2y + 2z = 15$. गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - yz = 11$ तथा समतल $x + 2y + 2z = 15$ के प्रतिच्छेद से बनने वाले वृत्त की त्रिज्या तथा केन्द्र ज्ञात कीजिए।

Unit-IV

8. Prove that the equation: सिद्ध कीजिए कि समीकरण:

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ represents a cone if: एक शंकु को दर्शाता है यदि: $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$.

9. Evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, where $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$ curve C is the rectangle in the xy -plane bounded by $y=0$, $x=a$, $y=b$, $x=0$. यदि $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$ तो $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ C xy -समतल में एक आयत है जो $y=0, x=a, y=b, x=0$ से बंधा है।