

B.A/B.Sc. I Year Examination, 2019 (Unified Syllabus)

Mathematics-II Calculus

(AB-127)

[M.M. : 33/65]

Time : 3 Hrs.]

Note: इस प्रश्न पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। This paper is divided into Five Sections-A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these ten parts are compulsory. Sections-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt one question from each Section. Answer must be descriptive. Section-A

Note : इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1.3/2.5 अंक का है।

1. (i) $x = 0$ पर फलन $f(x) = |x|$ की सततता का परीक्षण करें।
Discuss continuity of the function $f(x) = |x|$ at $x = 0$.

(ii) ज्ञात करें : Evaluate : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

(iii) n^{th} समाकलन का मान ज्ञात करें : Find the n^{th} differential coefficient of : $x^3 \log x$

(iv) मैक्लॉरिन श्रेणी का प्रयोग कर $\cos x$ का विस्तार, x की आरोही घातों में कीजिए।
Using Maclaurin's series, expand $\cos x$ in ascending powers of x .

(v) साइक्लायड $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ के बिन्दु 't' पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करें।
Find the equation of the tangent at the point 't' to the cycloid $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

(vi) रेखा परिवार $y = mx + (a/m)$ के एन्वेलप का समीकरण ज्ञात करें, जबकि m एक पैरामीटर है।
Find the envelope of the family of straight lines $y = mx + (a/m)$, the parameter being m .

(vii) सिद्ध करें : Prove that $\left(\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}$.

(viii) डबल इन्टीग्रल का प्रयोग करते हुए ज्ञात करें कि वक्र $y^2 = 4ax$ और $x^2 = 4ay$ के बीच के क्षेत्रफल का मान $\frac{16}{3} a^2$ है। Prove by the method of double integration that the area lying between the curves $y^2 = 4ax$ & $x^2 = 4ay$ is $\frac{16}{3} a^2$.

(ix) वक्र $r = a(1 + \cos \theta)$ के लिए $\frac{ds}{d\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए। Find $\frac{ds}{d\theta}$ for the curve $r = a(1 + \cos \theta)$.

(x) पप्पस व गटडीन प्रमेय का प्रयोग करते हुए इलिपस $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को इसके तल में रेखा $x = 2a$ के परितः घुमाने पर जनित छल्ले का आयतन ज्ञात करें। Using Pappus and Guldin theorem find the volume generated by revolution of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ about the line $x = 2a$.

Section-B

Note : प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। Each Section contains two questions. Attempt one question from each Section. Each question carries 5/10 marks. Answer must be descriptive.

2. (a) कौशी की माध्यमान प्रमेय लिखिये तथा सिद्ध कीजिए। State and prove Cauchy's mean value theorem.

(b) टेलर प्रमेय का प्रयोग कर $2x^3 + 7x^2 + x - 1$ का $(x-2)$ की घातों में विस्तार कीजिए।

Expand $2x^3 + 7x^2 + x - 1$ in powers of $(x-2)$ by using Taylor's theorem.

3. (a) लिबनीज प्रमेय का कथन लिखें, तथा इसका प्रयोग कर $x^3 \log x$ का n^{th} अवकलन मान ज्ञात करें।
State Leibnitz's theorem by using it find n^{th} differential coefficient of $x^3 \log x$.

(b) मैक्लारिन प्रमेय द्वारा $\frac{e^x}{1+e^x}$ का x^3 के पदों तक विस्तार कीजिये। Expand by Maclaurin's theorem $\frac{e^x}{1+e^x}$ as for as the terms x^3 .

Section-C

4. (a) यदि $u = \frac{x+y}{1-xy}$ एवं $v = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$ हो, तब $\frac{\partial(uv)}{\partial(x,y)}$ ज्ञात करें। क्या u और v में फलनीय सम्बन्ध है? यदि

ऐसा है, तो वह सम्बन्ध ज्ञात करें। If $u = \frac{x+y}{1-xy}$ and $v = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$, find $\frac{\partial(uv)}{\partial(x,y)}$. Are u and v

functionally related? If so find the relationship.

(b) किसी वक्र पर $y = \frac{ax}{a+x}$, यदि ρ किसी बिन्दु (x, y) पर वक्रता त्रिज्या हों, तब प्रदर्शित करें- For the curve

$y = \frac{ax}{a+x}$, if ρ is the radius of curvature at any point (x, y) , show that $\left(\frac{2\rho}{a}\right)^{2/3} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^2$.

5. (a) $x^2 + y^2 + z^2$ का निम्निष्ठ मान ज्ञात करें जबकि $ax + by + cz = p$ है।

Find the minimum value of $x^2 + y^2 + z^2$ where $ax + by + cz = p$.

(b) दिखाइये कि यदि CP एवं CD किसी दीर्घवृत्त के कनजुगेट अर्धव्यासों का युग्म है, a एवं b दीर्घवृत्त के अर्ध-अक्षों की लम्बाइयाँ हैं, तब p पर वक्रता त्रिज्या CD^3/ab है। Show that if CP, CD be a pair of Conjugate semi diameter of an ellipse, a and b being the lengths of semi axes, then radius of curvature at p is CD^3/ab .

Section-D

6. (a) वक्र $y^2 = (x-2)^2(x-1)$ पर मल्टीपल बिन्दुओं की स्थिति एवं प्रकृति ज्ञात कीजिए।
Determine the position and nature of the multiple points on the curve $y^2 = (x-2)^2(x-1)$.
- (b) वृत्तों के परिवार $(x-\alpha)^2 + y^2 = 4\alpha$ का एन्वेलप ज्ञात कीजिए, जहाँ α एक पैरामीटर है।
Find the envelope of the family of circles $(x-\alpha)^2 + y^2 = 4\alpha$, where α is parameter.

7. (a) सिद्ध करें : Prove that : $B(m, n) = B(m+1, n) + B(m, n+1)$ $m > 0, n > 0$.
- (b) समाकलन $\int \int x^2 y^2 dx dy$ का मान क्षेत्र $x^2 + y^2 \leq 1$ पर ज्ञात करें।

Evaluate $\int \int x^2 y^2 dx dy$ over the region $x^2 + y^2 \leq 1$.

Section-E

8. (a) तल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ अक्षों को A, B तथा C बिन्दुओं पर मिलता है। डीरिचलेट प्रमेय का प्रयोग करते हुए चतुष्फलक OABC का आयतन ज्ञात करें। इसका द्रव्यमान भी ज्ञात करें यदि किसी बिन्दु पर इसका घनत्व $K(xyz)$ है।
The Plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ meets the axes in A, B and C. Apply Dirichlet's integral to find the volume of the tetrahedron OABC. Also find its mass if the density at any points is $K(xyz)$.
- (b) परवलय $y^2 = 4ax$ के चाप, जिसको रेखा $y = 3x$ द्वारा काटा गया है, की लम्बाई ज्ञात करें।
Find the length of arc of parabola $y^2 = 4ax$ cut-off by the line $y = 3x$.
9. (a) कैटेनरी $y = \cosh(x/c)$ को x-अक्ष में परितः घुमाने पर ठोस का वक्रपृष्ठ ज्ञात कीजिए। Find the surface generated by the revolution of an arc of the catenary $y = \cosh(x/c)$ about the axis of x.
- (b) सिसोयड $y^2(2a-x) = x^3$ को उनकी अनन्त स्पर्शी के परितः घुमाने पर जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें। Find the volume of the solid generated by the revolution of the Cissoid $y^2(2a-x) = x^3$ about the asymptote.