

$$\cos \alpha + c \cos^2(\alpha + \beta) + \frac{1}{2!} \dots$$

**B.Sc. I Year Examination, 2018 (Unified Syllabus)**  
**Mathematics-II Calculus**

(B-127)

[M.M. : 33/65]

**Time : 3 Hrs.]**

**Note:** इस प्रश्न पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। This paper is divided into Five Sections-A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these

ten parts are compulsory. Sections-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt one question from each Section. Answer must be descriptive. खण्ड-अ (Section-A)

Note : इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1.3/2½ अंक का है। This Section contains one question of ten parts requiring short answers. Each part carries 1.3/2½ marks.

1. (i) दिखाइए कि फलन  $\phi$  जोकि इस प्रकार परिभाषित है कि : Show that the function  $\phi$  defined as :

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{for } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{for } x = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - x & \text{for } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

$x = \frac{1}{2}$  पर असतत् है। is discontinuous at  $x = \frac{1}{2}$ .

(ii) अन्तराल  $[1, 2]$  में  $f(x) = x(x-1)$  के लिए लैग्रेंज मध्यमान प्रमेय के 'C' का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of 'C' of Lagrange's mean value theorem for  $f(x) = x(x-1)$  in  $[1, 2]$  interval.

(iii) मैक्लॉरिन श्रेणी का प्रयोग कर  $\sin x$  का विस्तार,  $x$  की आरोही घातों में कीजिए।

Using Maclaurin's series, expand  $\sin x$  in ascending powers of  $x$ .

(iv) यदि  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , तब  $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$  का मान ज्ञात कीजिए।

If  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , then evaluate  $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$ .

(v) वक्र  $r = a(1 - \cos \theta)$  के लिए ' $\phi$ ' का मान ज्ञात कीजिए। Find the value of ' $\phi$ ' for the curve  $r = a(1 - \cos \theta)$ .

(vi) वक्र  $x^3 + y^3 - 2x^2 + 6y = 0$  के लिए मूलबिन्दु पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Find radius of curvature at origin for the curve  $x^3 + y^3 - 2x^2 + 6y = 0$ .

(vii) वक्र परिवार  $Ax^2 + Bx + C = 0$  के लिए एन्वेलप का समीकरण ज्ञात कीजिए (जहाँ A, B एवं C,  $x$  एवं  $y$  के कोई फलन हैं)।

Find the equation of envelope of the family of curves  $Ax^2 + Bx + C = 0$  (where A, B and C are some functions of  $x$  and  $y$ ).

(viii) वक्र  $x^3 + y^3 = 3axy$  के लिए सममितता तथा मूलबिन्दु पर स्पर्शियों ज्ञात कीजिए।

Find the symmetry and tangents at origin to the curve  $x^3 + y^3 = 3axy$ .

(ix) द्विसमाकलन  $\int_0^a \int_0^x f(x, y) dx dy$  में समाकलन का क्रम परिवर्तन कीजिए।

Change the order of integration in double integral  $\int_0^a \int_0^x f(x, y) dx dy$ .

(x) वक्र  $r = a(1 + \cos \theta)$  के लिए  $\frac{ds}{d\theta}$  का मान ज्ञात कीजिए। Find  $\frac{ds}{d\theta}$  for the curve  $r = a(1 + \cos \theta)$ .

#### खण्ड-ब (Section-B)

Note : प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। Each Section contains two questions. Attempt one question from each Section. Each question carries 5/10 marks. Answer must be descriptive.

2. (a) यदि  $y = x^n \log x$ , सिद्ध कीजिए कि  $xy_{n+1} = n!$  है।

If  $y = x^n \log x$ , prove that  $xy_{n+1} = n!$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$  का मान ज्ञात कीजिए। Evaluate  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ .

अथवा

3. (a) रोल के प्रमेय को बताइए तथा इसे सिद्ध कीजिए। State and prove Rolle's Theorem.

(b) यदि  $u = \log \frac{x^3 + y^3}{x + y}$ , दिखाइए कि : show that :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2.$$

अथवा

**खण्ड-स (Section-C)**

4. (a)  $z^2 = xy + 1$  पर मूलबिन्दु के सबसे समीप बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए। Find points on  $z^2 = xy + 1$  nearest to origin.  
 (b) सिद्ध कीजिए कि वक्र  $r^n = a^n \cos n\theta$  के किसी बिन्दु  $(r, \theta)$  पर अभिलम्ब, प्रारम्भिक रेखा से  $(n + 1)\theta$  का कोण बनाता है। Prove that the normal at any point  $(r, \theta)$  to the curve  $r^n = a^n \cos n\theta$  makes an angle  $(n + 1)\theta$  with the initial line. अथवा
5. (a) दिखाइए कि वक्र  $r = a(1 + \cos \theta)$  के लिए, ध्रुव से गुजरने वाला वक्रता चापकर्ण  $\frac{4}{3}r$  है। :

Show that chord of curvature through pole for the curve  $r = a(1 + \cos \theta)$  is  $\frac{4}{3}r$ .

- (b) परवलय  $y^2 = 4ax$  का इवोल्यूट ज्ञात कीजिए। Find evolute of the parabola  $y^2 = 4ax$ . अथवा

**खण्ड-द (Section-D)**

6. (a) वक्र  $x^3 + 2x^2y + xy^2 - x^2 - xy + 2 = 0$  के सभी अनन्तस्पर्शियों को ज्ञात कीजिए।  
 - Find all the asymptotes of the curve  $x^3 + 2x^2y + xy^2 - x^2 - xy + 2 = 0$ .  
 (b) वक्र  $y^2 = (x - 2)^2(x - 1)$  पर डबल बिन्दुओं की प्रकृति ज्ञात कीजिए।  
 Determine the nature of double points on the curve  $y^2 = (x - 2)^2(x - 1)$ . अथवा:
7. (a) रिडक्शन सूत्र का प्रयोग कर,  $\int_0^1 (\log x)^4 x^m dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Using reduction formula, evaluate  $\int_0^1 (\log x)^4 x^m dx$ .

- (b) वक्र  $r = a + b \cos \theta$  का चित्रण कीजिए, जहाँ  $a > b$  है। Trace the curve  $r = a + b \cos \theta$ , where  $a > b$ .

**खण्ड-इ (Section-E)**

8. (a) परवलय  $y^2 = 4ax$  के चाप जोकि रेखा  $y = 3x$  द्वारा काटा गया है, की लम्बाई ज्ञात कीजिए।  
 Find the length of arc of parabola  $y^2 = 4ax$  cut off by the line  $y = 3x$ .  
 (b)  $\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{4z-x^2}} dz dx dy$  मान ज्ञात कीजिए।  
 Evaluate  $\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{4z-x^2}} dz dx dy$ . अथवा
9. (a) पप्पस व गल्डीन के प्रमेय का प्रयोग कर, दीर्घवृत्त  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  को रेखा  $x = 2a$  के परितः घुमाने पर बने ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।  
 Using theorem of Pappus and Guldin, find the volume of the solid generated by revolution of the ellipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  about the line  $x = 2a$ .  
 (b)  $\iiint \log(x + y + z) dx dy dz$  का मान ज्ञात कीजिए, जबकि समाकलन  $x, y, z$  के उन सभी धनात्मक मानों पर विस्तारित है जोकि  $x + y + z < 1$  की शर्त पूर्ण करते हों।  
 Find the value of  $\iiint \log(x + y + z) dx dy dz$ , the integral extending over all positive values of  $x, y, z$  subject to the condition  $x + y + z < 1$ .