

B.A/B. Sc. I Year Examination, 2015 (Unified Syllabus)

Mathematics-II Calculus

Time : 3 Hrs.]

(AB-127)

[M.M. : 33/65

नोट: इस प्रश्न पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

खण्ड-अ

नोट: इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1.3/2.5 अंक का है।

1. (a) $x = 0$ पर फलन : Find the limit of the function f defined by :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{यदि } \text{If } x \neq 0 \\ 0 & \text{अन्यथा otherwise} \end{cases}$$

की सीमा ज्ञात कीजिए, यदि इसका अस्तित्व है तब। at $x = 0$ if it exists.

(b) फलन : Find right hand derivative for :

$$f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

के लिए दाएँ हाथ का अवकलन ज्ञात कीजिए।

(c) यदि $u = e^{x/y^2}$, तब $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ का मान ज्ञात कीजिए। If $u = e^{x/y^2}$, then find the value of $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

(d) गामा फलन का प्रयोगकर Using Gamma function evaluate : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\log x}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(e) ज्ञात कीजिए : Find :

$$\int_1^2 \int_3^4 (xy + e^y) dy dx.$$

(f) दीर्घवृत्त $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ का पोलर उपस्पर्शी ज्ञात कीजिए। Find polar subtangent of ellipse : $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$.

(g) वक्र $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ के लिए अक्षों के समान्तर अनन्तस्पर्शियों को ज्ञात कीजिए।

Find asymptotes parallel to the axes of the curve $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$

(h) यदि $u = 3x + 2y$, $v = x - 2y$ तब u, v का जेकोबियन ज्ञात कीजिए।

If $u = 3x + 2y$, $v = x - 2y$, then find Jacobian of u, v .

(i) पप्पस एवं गुल्डीन प्रमेय का प्रयोगकर a त्रिज्या के वृत्त को इसके केन्द्र से इसके तल में b दूरी पर अक्ष के परितः घुमाने पर बने झल्ले का आयतन ज्ञात कीजिए।

Using Pappus and Guldin theorem find volume of the ring generated by revolution of a circle of radius a about an axis in its own plane distant b from its centre ($b > a$).

(j) वक्र $r^3 = 2ap^2$ के किसी बिन्दु (p, r) पर वक्रता ज्ञात कीजिए।

Find the curvature at any point (p, r) on the curve $r^3 = 2ap^2$.

खण्ड-ब, स, द, इ

नोट: प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है।

खण्ड-ब

2. (a) लेग्रान्ज के माध्य मान प्रमेय का कथन बताइए तथा इसे सिद्ध कीजिए।

State and prove Lagrange's mean value theorem.

(b) यदि $y = \sin mx + \cos mx$, तब दिखाइए कि y का n वाँ अवकलज है :

If $y = \sin mx + \cos mx$, show that n th derivative of y :

$$y_n = m^n [1 + (-1)^n \sin 2mx]^{1/2}.$$

3. (a) यदि $y = (\sin^{-1} x)^2$, तब सिद्ध कीजिए कि : If $y = (\sin^{-1} x)^2$, prove that :

$$(1-x^2) y_{n+2} - (2n+1) y_{n+1} - n^2 y_n = 0.$$

(b) टेलर प्रमेय का प्रयोगकर $\sin x$ का $(x - \pi/2)$ की घातों में विस्तार कीजिए।

Expand $\sin x$ in powers of $(x - \pi/2)$ by using Taylor's theorem.

खण्ड-स

4. (a) यदि $u = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$, तब यूलर प्रमेय का प्रयोगकर दिखाइए कि : If $u = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$, then by using Euler's

theorem, show that : $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

(b) जेकोबियन $\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)}$ ज्ञात कीजिए, जबकि : Find Jacobian $\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)}$, where :

$$u = 2xy, v = x^2 - y^2, x = r \cos \theta, y = r \sin \theta.$$

5. (a) दिखाइए कि यदि CP एवं CD किसी दीर्घवृत्त के कॉन्जुगेट अर्द्धव्यासों का युग्म है, a एवं b दीर्घवृत्त के अर्द्ध-अक्षों की लम्बाइयाँ हैं, तब P पर वक्रता त्रिज्या CD^3 / ab है।

Show that if CP, CD be a pair of conjugate semidiameter of an ellipse, a and b being the lengths of semi-axes, then radius of curvature at P is CD^3 / ab .

(b) मान ज्ञात कीजिए : Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{1/x}$$

खण्ड-द

6. (a) वृत्तों के परिवार $(x - \alpha)^2 + y^2 = 4\alpha$ का एन्वेलप ज्ञात कीजिए, जहाँ α एक पैरामीटर है।

Find the envelop of the family of circles $(x - \alpha)^2 + y^2 = 4\alpha$, where α is parameter.

(b) सिद्ध कीजिए कि साइन स्पाइरल $r^n = a^n \sin n\theta$ का पेडल समीकरण $pa^n = r^{n+1}$ है।

Prove that the pedal equation of the sine spiral $r^n = a^n \sin n\theta$ is $pa^n = r^{n+1}$.

7. (a) दिखाइए कि उच्चिष्ठ क्षेत्रफल का त्रिभुज जो कि वृत्तान्तर्गतंकित है, एक समत्रिबाहु त्रिभुज होता है।

Show that the triangle of maximum area which can be inscribed in a circle is an equilateral triangle.

(b) सिद्ध कीजिए कि बीटा फलन : Prove that Beta function :

$$\beta(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx, \text{ जहाँ } m > 0, n > 0 \text{ है। Where } m > 0, n > 0.$$

खण्ड-इ

8. (a) यदि $u_n = \int_0^{\pi/2} \theta \sin^n \theta d\theta$ तथा $n > 1$, तब सिद्ध कीजिए कि : then prove that :

$$u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{(n-1)}{n} u_{n-1}$$

यहाँ से निष्कर्ष कीजिए कि Hence deduce that $u_5 = \frac{149}{225}$.

(b) वक्र $r = a \cos 3\theta$ का रेखांकन कीजिए। Trace the curve $r = a \cos 3\theta$.

9. (a) परवलय $x^2 = 4ay$ की शीर्षबिन्दु से नाभिलम्ब जीवा के एक सिरे तक की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Find length of the parabola $x^2 = 4ay$ from vertex to an extremity of the latus ractum.

(b) कार्डिऑइड $r = a(1 + \cos \theta)$ को प्रारम्भिक रेखा के परितः घुमाने पर जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

Find the volume of the solid generated by revolving cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$ about the initial line.