

**B.Sc. I Year Examination, 2014 (Unified Syllabus)**  
**Mathematics-II**  
**Calculus**

M M: 33/65

**Time: Three Hours**

(AB-127)

**Note:** This paper is divided into five Sections—A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these ten parts are compulsory. Section-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt one question from each Section. Answer must be descriptive. इस प्रश्न-पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्ड-ब, स, द एवं इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

**Section-A**

**Note:** This Section contains one question of ten parts Each part carries 1.3/2½ marks.

इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भाग हैं। प्रत्येक भाग 1.3/2½ अंक का है।

1. (a) Discuss continuity of the function  $f(x)=|x|$  at  $x=0$ . फलन  $f(x)=|x|$  का  $x=0$  पर सततता परीक्षण कीजिए।
- (b) If  $x \neq 0$  and  $f(0)=0$ . Then find left hand derivative of: यदि  $x \neq 0$  तथा  $f(0)=0$ , तो फलन का बायें हाथ का अवकलन ज्ञात कीजिए।

$$f(x) = x \left[ \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} \right]$$

- (c) If  $x=r \cos \theta, y=r \sin \theta$ , then find  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ . यदि  $x=r \cos \theta, y=r \sin \theta$ , तब  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  ज्ञात कीजिए।

- (d) Find: ज्ञात कीजिए:  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sec x)^{\cot x}$

- (e) Find the angle made by normal to curve  $r^n = a^n \cos n\theta$  at the point  $(r, \theta)$  with initial line. वक्र  $r^n = a^n \cos n\theta$  के बिन्दु  $(r, \theta)$  पर बना अभिलम्ब, प्रारम्भिक रेखा के साथ जो कोण बनाता है, वह ज्ञात कीजिए।

- (f) Express the integral  $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^5)}} dx$  in terms of Beta function. बीटा फलन के पदों में समाकलन  $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^5)}} dx$  को अभिव्यक्त कीजिए।

- (g) If  $x=u^2-v^2, y=u+v$ , then find Jacobian of  $(x, y)$ . यदि  $x=u^2-v^2, y=u+v$ , तब जैकोबियन  $(x, y)$  ज्ञात कीजिए।

- (h) Find asymptotes parallel to axes for the curve  $y^2(x^2-a^2)=x$ . वक्र  $y^2(x^2-a^2)=x$  के लिए अक्षों के समान्तर अनन्त स्पर्शियों को ज्ञात कीजिए।

- (i) Using Pappus and Guldin theorem find surface area of the ring generated by revolution of a circle of radius  $a$  about an axis in its own plane distant  $b$  from its centre. ( $b > a$ ). पप्पस व गल्डीन प्रमेय का प्रयोग कर  $a$  त्रिज्या के वृत्त को इसके केन्द्र से इसके तल में  $b$  दूरी पर अक्ष के परितः घुमाने पर जनित झल्ले का पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- (j) Find radius of curvature at  $(x, y)$  on the curve  $y = \log \sin x$ . वक्र  $y = \log \sin x$  पर बिन्दु  $(x, y)$  पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

**Note:** Each section contains two questions. Attempt one question from each Section. Each question carries 5/10 marks. प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

Section-B, C, D, E

Section-B

2. (a) Find the  $n$ th derivative of  $\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ .  $\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$  का  $n$  वाँ अवकलन ज्ञात कीजिए।

(b) State and prove Rolle's theorem. रौले प्रमेय का कथन बताइए तथा इसे सिद्ध कीजिए।

3. (a) If  $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ , prove that. यदि  $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ , तब सिद्ध कीजिए कि:

$$(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0.$$

(b) Expand by Maclaurin's theorem  $\frac{e^x}{1+e^x}$  as far as the terms  $x^3$ .

मैक्लारिन प्रमेय द्वारा  $\frac{e^x}{1+e^x}$  का  $x^3$  के पदों तक विस्तार कीजिए।

### Section-C

4. (a) Verify Euler's theorem for the function  $u = \tan^{-1} \left( \frac{x^3 + y^3}{x-y} \right)$ . फलन  $u = \tan^{-1} \left( \frac{x^3 + y^3}{x-y} \right)$  के लिए यूलर का प्रमेय सत्यापित कीजिए।

(b) If  $u = \frac{x+y}{1-xy}$  and  $v = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$ , find  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ . Are  $u$  and  $v$  functionally related? If so, find the relationship.

यदि  $u = \frac{x+y}{1-xy}$  एवं  $v = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$ , तब  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$  ज्ञात कीजिए। क्या  $u$  एवं  $v$  में फलनीय सम्बन्ध है? यदि ऐसा है, तो वह सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

5. (a) Find the maximum and minimum values of  $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$ , when  $lx + my + nz = 0$  and  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$ , के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मानों को ज्ञात कीजिए, जबकि  $lx + my + nz = 0$  तथा  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  है।

(b) Find radius of curvature at  $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$  on the curve  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ .  
वक्र  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  पर  $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$  बिन्दु पर वक्रतः त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

### Section-D

6. (a) Find the evolute of the parabola  $y^2 = 4ax$ . परवलय  $y^2 = 4ax$  का इवोल्यूट ज्ञात कीजिए।

(b) Determine the position and nature of the multiple points on the curve  $y^2 = (x-2)^2(x-1)$ .  
वक्र  $y^2 = (x-2)^2(x-1)$  पर मल्टीपल बिन्दुओं की स्थिति एवं प्रकृति ज्ञात कीजिए।

7. (a) Trace the curve  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ . वक्र  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  का रेखांकन कीजिए।

(b) Prove that Beta and Gamma functions are related as  $\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ .

सिद्ध कीजिए कि बीटा एवं गामा फलन, सम्बन्ध  $\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$  से सम्बन्धित है।

### Section-E

8. (a) Using Reduction formula, evaluate  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$ . रिडक्शन सूत्र का प्रयोग कर  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

(b) The part of the parabola  $y^2 = 4ax$  cut-off by latus rectum revolves about the tangent at the vertex. Find volume of the reel thus generated. परवलय  $y^2 = 4ax$  वह भाग जो नाभिलम्ब जीवा द्वारा काटा गया है, शीर्ष पर स्पर्शी के परितः घूमता है। इस प्रकार जनित रील का आयतन ज्ञात कीजिए।

9. (a) The plane  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  meets the axes in  $A, B$  and  $C$ . Apply Dirichlet's integral to find the volume of

tetrahedron  $OABC$ . Also find its mass if the density at any point is  $k(xyz)$ . तल  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  अक्षों को  $A, B$  व  $C$  पर मिलता है। डीचलेट प्रमेय का प्रयोगकर चतुष्फलक  $OABC$  का आयतन ज्ञात कीजिए। इसका द्रव्यमान भी ज्ञात कीजिए यदि किसी बिन्दु पर इसका  $k(xyz)$  घनत्व है।

(b) Prove that the arc of upper half of the curve  $r = a(1 - \cos\theta)$  is bisected by  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ .

सिद्ध कीजिए कि वक्र  $r = a(1 - \cos\theta)$  के ऊपरी आधे चाप को  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  समद्विभाजित करता है।