

(b) Sum the series : श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए। $1+3+4$ $1+0.7$

B.A./B.Sc. I Year Examination, 2013 (Unified Syllabus)
MATHEMATICS - II (Calculus)

(AB-127)

[M.M: B.A. 33/B.Sc. 65]

Time: 3 Hours

Note: This paper is divided into two Sections-A and B. Section A contains Short Answer Questions and Section-B contains Descriptive Answer Questions. Attempt all the Sections as per instructions. इस प्रश्न पत्र को दो खण्डों-अ तथा ब में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ में लघु उत्तरीय प्रश्न तथा खण्ड-ब में विस्तृत उत्तरीय प्रश्न हैं। सभी खण्डों को निर्देशानुसार हल कीजिए।

Section-A

Note: This Section contain one compulsory question. This question contains ten parts. All parts are compulsory. Each part carries 1.3/2.5 marks. इस खण्ड में एक अनिवार्य प्रश्न है। इस प्रश्न के दस भाग हैं। सभी भाग अनिवार्य हैं। प्रत्येक भाग 1.3/2.5 अंक का है।

- 1. (a) Discuss the kind of discontinuity, if any, of the function: यदि फलन: में असततता है, तो असततता के प्रकार की विवेचना कीजिए।

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x}, & \text{if यदि } x \neq 0 \\ 2, & \text{if यदि } x = 0. \end{cases}$$

- (b) Discuss the applicability of Rolle's theorem in the interval $[-1, 1]$ to the function $f(x) = x^4 - 1$. अन्तराल $[-1, 1]$ में फलन $f(x) = x^4 - 1$ के लिए रोल प्रमेय की अनुकूलता की विवेचना कीजिए।

- (c) If $x = u(1+v), y = v(1+u)$, then show that: यदि $x = u(1+v), y = v(1+u)$, तब दिखाइए कि: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1+u+v$.

- (d) Evaluate: मान ज्ञात कीजिए:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{1/x}$$

- (e) Find the radius of curvature at any point (p, r) on the curve $pa^2 = r^3$. वक्र $pa^2 = r^3$ पर (p, r) बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

- (f) Show that in the curve $r = e^{\theta \cot \alpha}$, the tangent is inclined at a constant angle α to the radius vector. दिखाइए कि वक्र $r = e^{\theta \cot \alpha}$ में स्पर्शा, त्रिज्या सदिश से अचर कोण के झुकाव पर है।

- (g) Find double point and its nature on the curve $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. वक्र $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ पर डबल बिन्दु व इसकी प्रकृति ज्ञात कीजिए।

- (h) Evaluate: मान ज्ञात कीजिए: $\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx$.

- (i) Evaluate the double integral of $x^2 y^3$ over the rectangle bounded by $x=2, x=3, y=2, y=4$.

आयत जोकि $x=2, x=3, y=2, y=4$ से सीमित है, पर $x^2 y^3$ के डबल समाकलन का मान ज्ञात कीजिए।

- (j) State Liouville's extension of Dirichlet's theorem. डिरिचलेट प्रमेय का ल्यूविले विस्तार बताइए।

Section-B

Note: This Section is divided into four Units. Each Unit contains two questions. Attempt any one question from each Unit. Each question carries 5/10 marks. Answer must be descriptive. इस खण्ड को चार इकाईयों में विभाजित किया गया है। प्रत्येक इकाई में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक इकाई से कोई एक प्रश्न हल कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

Unit-I

- 2. (a) Show that the function $f(x) = x \tan^{-1} \left(\frac{1}{x} \right)$ for $x \neq 0$ and $f(0) = 0$ is continuous but not differentiable at $x = 0$. दिखाइए कि फलन $f(x) = x \tan^{-1} \left(\frac{1}{x} \right)$ जबकि $x \neq 0$ तथा $f(0) = 0$, $x = 0$ पर एक सतत फलन है किन्तु अवकलनीय फलन नहीं है।

- (b) Verify Cauchy's mean value theorem for $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ in $[-\pi/2, 0]$. अन्तराल $[-\pi/2, 0]$ में फलन $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ के लिए काशी मध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए।

3. (a) If $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$, show that: $x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$.

यदि $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$ तब दिखाइए कि: $x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$.

- (b) Using $(\epsilon-\delta)$ definition of limit show that: सीमा की $(\epsilon-\delta)$ परिभाषा का प्रयोग कर दिखाइए कि:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Unit-II

4. (a) If $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, show that: यदि $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, दिखाइए कि: $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta} = r \frac{\partial \theta}{\partial x}$.
- (b) Explain $\log \sin x$ in power of $(x - a)$. $\log \sin x$ को $(x - a)$ की घातों में विस्तारित कीजिए।
5. (a) Discuss maxima and minima of the function: फलन के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ की विवेचना कीजिए।

$$u = xy + a^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

- (b) If $f(0) = 0$ and $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, prove without using the method of integration, that: यदि $f(0) = 0$ तथा

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, तब समाकलन रीति का प्रयोग किये बिना सिद्ध कीजिए कि: $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

Unit-III

6. (a) Find evolute of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का इवोल्यूट ज्ञात कीजिए।

- (b) Find the points of inflexion on the curve $r(\theta^2 - 1) = a\theta^2$.

वक्र $r(\theta^2 - 1) = a\theta^2$ पर इन्फ्लेक्सन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए।

7. (a) Trace the curve $y^2(a+x) = x^2(a-x)$. वक्र $y^2(a+x) = x^2(a-x)$ रेखांकित कीजिए।

- (b) Find reduction formula for $\int x \sin^n dx$. $\int x \sin^n dx$ के लिए रीडक्शन सूत्र ज्ञात कीजिए।

Unit-IV

8. (a) Express the integral $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^5}} dx$ in terms of Beta function. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^5}} dx$ को बीटा फलन के पदों में व्यक्त कीजिए।

- (b) Find the surface of the solid generated by revolution of the astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ about the x-axis. आस्ट्रोइड $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ को x-अक्ष के परितः घुमाकर प्राप्त ठोस का सतह क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. (a) Show that area contained between the circle $r = a$ and the curve $r = a \cos 5\theta$ is equal to three-fourth of the area of the circle. दिखाइए कि वृत्त $r = a$ व वक्र $r = a \cos 5\theta$ के मध्य का क्षेत्रफल, वृत्त के क्षेत्रफल के तीन-चौथाई के बराबर है।

- (b) Change the order of integration in the integral $\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dy dx$. समाकलन $\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dy dx$ में समाकलन का क्रम बदलिए।