

**Note:** इस प्रश्न पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। This paper is divided into Five Sections-A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these ten parts are compulsory. Sections-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt one question from each Section. Answer must be descriptive. **Section-A**

**Note :** इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1·3/2·5 अंक का है। This Section contains one question of ten parts requiring short answers. Each part carries 1·3/2·5 marks.

1. (i) अनन्त श्रेणी के लिए डी-एलमबर्ट के अनुपात परीक्षण का कथन कीजिए। State D'Alembert's ratio test for infinite series.  
 (ii) दर्शाइए कि अनुक्रम  $\langle s_n \rangle$  की सीमा 3 है, जहाँ  $s_n = \frac{3n}{n + 5\sqrt{n}}$  है।

Show that the limit of the sequence  $\langle s_n \rangle$ , where  $s_n = \frac{3n}{n + 5\sqrt{n}}$  is 3.

- (iii) यदि  $a$  तथा  $b$  किसी समूह  $G$  के दो अवयव हों तो सिद्ध कीजिए-  $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$   
 If  $a$  and  $b$  are two elements of a group  $G$  then prove that :  $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$   
 (iv) समूह  $(G, x) = \{1, -1, i, -i\}$  में  $i$  का क्रम ज्ञात कीजिए।  
 Find the order of  $i$  in the group  $(G, x) = \{1, -1, i, -i\}$ .  
 (v) कैले के प्रमेय का कथन लिखिए। State Cayley's theorem.  
 (vi) क्षेत्र को परिभाषित कीजिए। Define a field.  
 (vii) एक वलय की गुणजावली को परिभाषित कीजिए। Define an ideal of a ring.  
 (viii) सिद्ध कीजिए कि : Prove that :  $\tan^{-1} \left( \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) = \tan^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{3} \tan^6 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{5} \tan^{10} \frac{\theta}{2} \dots \infty$   
 (ix) सिद्ध कीजिए कि : Prove that :  $\tan^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$ .  
 (x) सिद्ध कीजिए कि : Prove that :  $\log \left( \frac{a+ib}{a-ib} \right) = 2i \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right)$ .

**Section-B**

**Note :** प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

2. निम्न श्रेणियों की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए: Test the convergence of the following series :

(a)  $1 + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^2 \cdot 4^2}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} + \dots \infty$

(b)  $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots \infty$

3. (a) दर्शाइए कि : Show that :  $\lim \left[ \frac{(n!)^{1/n}}{n} \right] = \frac{1}{e}$ .

- (b) दर्शाइए कि निम्न श्रेणी प्रतिबन्धी अभिसारी है: Show that following series is conditionally convergent:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \infty$$

**Section-C**

4. (a) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह  $G$  के किन्हीं दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी  $G$  का एक उपसमूह होता है। Prove that the intersection of any two subgroup of a group  $G$  is also a subgroup of  $G$ .

- (b) यदि  $a$  तथा  $x$  किसी समूह  $G$  के कोई दो अवयव हैं, तो दर्शाइए कि: If  $a$  and  $x$  are any two elements of a group  $G$ , then show that:  $O(a) = O(x^{-1}ax)$  अथवा
5. (a) दर्शाइए कि सभी पूर्णाकों का समुच्चय  $I$  संक्रिया  $*$ , जो  $a * b = a + b + 1 \forall a, b \in I$  के द्वारा परिभाषित है, के साथ सापेक्ष एक समूह है। Show that the set  $I$  of all integers is a group w.r.t. respect to operation  $*$  defined by  $a * b = a + b + 1 \forall a, b \in I$ .
- (b) लेग्रान्ज प्रमेय का कथन लिखकर उसे सिद्ध कीजिए। State and prove Lagrange's theorem. Section-D
6. (a) दर्शाइए कि किसी समूह  $G$  का एक उपसमूह  $H$ , समूह  $G$  का प्रसामान्य उपसमूह होता है यदि और केवल यदि: Show that a subgroup  $H$  of a group  $G$  is a normal subgroup of  $G$  if and only if:  $xHx^{-1} = H \forall x \in G$ .
- (b) दर्शाइए कि प्रत्येक परिमित पूर्णाकीय डोमेन एक क्षेत्र होता है।  
Show that every finite integral domain is a field. अथवा
7. (a) एक वलय के उपवलय को परिभाषित कीजिए तथा दर्शाइए कि सभी पूर्णाकों का समुच्चय  $I$ , सभी परिमेय संख्याओं के वलय  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  का एक उपवलय है। Define a subring of a ring  $R$  and show that the set  $I$  of all integers is a subring of the ring  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  of all rational numbers.
- (b) दर्शाइए कि एक क्षेत्र की कोई वास्तविक गुणजावली नहीं होती।  
Prove that a field has no proper ideals. Section-E
8. (a) यदि  $f: \sin(\alpha + i\beta) = x + iy$   
सिद्ध कीजिए: Prove that:  
(i)  $x^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha - y^2 \sec^2 \alpha = 1$   
(ii)  $x^2 \sec^2 \beta + y^2 \operatorname{cosec}^2 \beta = 1$
- (b) यदि  $f: (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \dots (a_n + ib_n) = A + iB$ ,  
सिद्ध कीजिए कि: Prove that:  
(i)  $\tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2}\right) + \dots + \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \tan^{-1}\frac{B}{A}$   
(ii)  $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \dots (a_n^2 + b_n^2) = A^2 + B^2$ .
9. (a) निम्न श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए: Find the sum of the following series:  
$$\sin \alpha - \frac{\sin 3\alpha}{2!} + \frac{\sin 5\alpha}{4!} + \dots \infty$$
- (b)  $\tan^{-1}(x + iy)$  को वास्तविक एवं काल्पनिक भागों के योग के रूप में प्रदर्शित कीजिए।  
Express  $\tan^{-1}(x + iy)$  as the sum of real and imaginary parts.