

DREAM TOPPER

Best E-learning Platform

Download pdf..

[Www.dreamtopper.in](http://www.dreamtopper.in)

SACHIN DAKSH dreamtopper.in

B.A./B.Sc. I Year Examination, 2019 (Unified Syllabus)

Mathematics-I Algebra and Trigonometry

Time : 3 Hrs.]

(AB-126)

[M.M. : 33/65]

Note: इस प्रश्न पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। This paper is divided into Five Sections-A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these ten parts are compulsory. Sections-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt one question from each Section. Answer must be descriptive.

Note : इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1·3/2·5 अंक का है। This Section contains one question of ten parts requiring short answers. Each part carries 1·3/2·5 marks.

1. (i) अनन्त श्रेणी के लिए डी-एलमबर्ट के अनुपात परीक्षण का कथन कीजिए। State D'Alembert's ratio test for infinite series.
2. (ii) दर्शाइए कि अनुक्रम $\langle s_n \rangle$ की सीमा 3 है, जहाँ $s_n = \frac{3n}{n + 5\sqrt{n}}$ है।
Show that the limit of the sequence $\langle s_n \rangle$, where $s_n = \frac{3n}{n + 5\sqrt{n}}$ is 3.
3. (iii) यदि a तथा b किसी समूह G के दो अवयव हों तो सिद्ध कीजिए- $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$
If a and b are two elements of a group G then prove that : $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$
4. (iv) समूह $(G, x) = \{1, -1, i, -i\}$ में i का क्रम ज्ञात कीजिए।
Find the order of i in the group $(G, x) = \{1, -1, i, -i\}$.
5. (v) कैले के प्रमेय का कथन लिखिए। State Cayley's theorem.
6. (vi) क्षेत्र को परिभाषित कीजिए। Define a field.
7. (vii) एक वलय की गुणजावली को परिभाषित कीजिए। Define an ideal of a ring.
8. (viii) सिद्ध कीजिए कि : Prove that : $\tan^{-1} \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) = \tan^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{3} \tan^6 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{5} \tan^{10} \frac{\theta}{2} \dots \infty$
9. (ix) सिद्ध कीजिए कि : Prove that : $\tan h^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$.
10. (x) सिद्ध कीजिए कि : Prove that : $\log \left(\frac{a+ib}{a-ib} \right) = 2i \tan^{-1} \left(\frac{b}{2} \right)$.

Section-B

Note : प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

2. निम्न श्रेणियों की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए: Test the convergence of the following series :

1. (a) $1 + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^2 \cdot 4^2}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} + \dots \infty$.
2. (b) $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots \infty$
3. (a) दर्शाइए कि : Show that : $\lim \left[\frac{(n!)^{1/n}}{n} \right] = \frac{1}{e}$.

(b) दर्शाइए कि निम्न श्रेणी प्रतिबन्धी अभिसारी है: Show that following series is conditionally convergent:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \infty$$

Section-C

4. (a) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G के किन्हीं दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी G का एक उपसमूह होता है। Prove that the intersection of any two subgroup of a group G is also a subgroup of G .

- (b) यदि a तथा x किसी समूह G के कोई दो अवयव हैं, तो दर्शाइए कि: If a and x are any two elements of a group G , then show that: $0(a) = 0(x^{-1} a x)$ अथवा
5. (a) दर्शाइए कि सभी पूर्णांकों का समुच्चय I संक्रिया $*$, जो $a * b = a + b + 1 \forall a, b \in I$ के द्वारा परिभाषित है, के साथ सापेक्ष एक समूह है। Show that the set I of all integers is a group with respect to operation $*$ defined by $a * b = a + b + 1 \forall a, b \in I$.
- (b) लेग्रांज प्रमेय का कथन लिखकर उसे सिद्ध कीजिए। State and prove Lagrange's theorem. Section-D
6. (a) दर्शाइए कि किसी समूह G का एक उपसमूह H , समूह G का प्रसामान्य उपसमूह होता है यदि और केवल यदि : Show that a subgroup H of a group G is a normal subgroup of G if and only if : $xHx^{-1} = H \forall x \in G$.
- (b) दर्शाइए कि प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय डोमेन एक क्षेत्र होता है। Show that every finite integral domain is a field. अथवा
7. (a) एक वलय के उपवलय को परिभाषित कीजिए तथा दर्शाइए कि सभी पूर्णांकों का समुच्चय I , सभी परिमेय संख्याओं के वलय $(Q, +, .)$ का एक उपवलय है। Define a subring of a ring R and show that the set I of all integers is a subring of the ring $(Q, +, .)$ of all rational numbers.
- (b) दर्शाइए कि एक क्षेत्र की कोई वास्तविक गुणजावली नहीं होती। Prove that a field has no proper ideals. Section-E
8. (a) यदि If : $\sin(\alpha + i\beta) = x + iy$
सिद्ध कीजिए : Prove that :
(i) $x^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha - y^2 \sec^2 \alpha = 1$
(ii) $x^2 \sec^2 \beta + y^2 \operatorname{cosec}^2 \beta = 1$
- (b) यदि If : $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \dots (a_n + ib_n) = A + iB$,
सिद्ध कीजिए कि : Prove that :
(i) $\tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2}\right) + \dots + \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \tan^{-1}\frac{B}{A}$
(ii) $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \dots (a_n^2 + b_n^2) = A^2 + B^2$.
9. (a) निम्न श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए : Find the sum of the following series :

$$\sin \alpha - \frac{\sin 3\alpha}{2!} + \frac{\sin 5\alpha}{4!} - \dots \infty$$
- (b) $\tan^{-1}(x + iy)$ को वास्तविक एवं काल्पनिक भागों के योग के रूप में प्रदर्शित कीजिए। Express $\tan^{-1}(x + iy)$ as the sum of real and imaginary parts.