

B. A./B.Sc. I Year Examination, 2018 (Unified Syllabus)

Mathematics-I Algebra and Trigonometry

Time : 3 Hrs.]

(AB-126)

[M.M. : 33/65]

Note: इस प्रश्न पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। This paper is divided into Five Sections-A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these ten parts are compulsory. Sections-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt one question from each Section. Answer must be descriptive. **खण्ड-अ (Section-A)**

Note : इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1-3/2-5 अंक का है। This Section contains one question of ten parts requiring short answers. Each part carries 1-3/2-5 marks.

1. (i) दिखाइए कि अनुक्रम $\langle s_n \rangle$ की सीमा 2 है, जहाँ $s_n = \frac{2n}{(n+4)}$ है।

Show that the limit of the sequence $\langle s_n \rangle$, where $s_n = \frac{2n}{(n+4)}$, is 2..

(ii) अनन्त श्रेणी के लिए कौशी के मूल परीक्षण का कथन लिखिए। State Cauchy's root test for infinite series.

(iii) दर्शाइए कि एक समूह में प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम अद्वितीय होता है।

Show that the inverse of every element of a group is unique.

(iv) समूह $(G, +_6) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ में अवयव 4 का क्रम ज्ञात कीजिए।

Find the order of the element 4 in the group $(G, +_6) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(v) लैग्रान्ज के प्रमेय का कथन लिखिए। State Lagrange's theorem.

(vi) किसी क्षेत्र के उपक्षेत्र को परिभाषित कीजिए। Define subfield of a field.

(vii) दर्शाइए कि सभी पूर्णाकों का समुच्चय I, सभी परिमेय संख्याओं के वलय Q का एक उपवलय है।

Show that the set I of all integers is a subring of the ring Q of all rational numbers.

(viii) सिद्ध कीजिए कि : Prove that :

$$\sinh^{-1} z = \log \left[z + \sqrt{(z^2 + 1)} \right].$$

(ix) सिद्ध कीजिए कि : Prove that :

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} \dots \infty$$

(x) सिद्ध कीजिए कि : Prove that :

$$\log(1+i) = \frac{1}{2} \log 2 + i \left(2n\pi + \frac{\pi}{4} \right).$$

खण्ड-ब (Section-B)

Note : प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। Each Section contains two questions. Attempt one question from each Section. Each question carries 5/10 marks. Answer must be descriptive.

2. निम्न श्रेणियों की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए: Test the convergence of the following series :

(a) $2 + \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{5}{4}x^3 \dots \infty$.

(b) $\frac{1^2}{4^2} + \frac{1^2 \cdot 5^2}{4^2 \cdot 8^2} + \frac{1^2 \cdot 5^2 \cdot 9^2}{4^2 \cdot 8^2 \cdot 12^2} + \frac{1^2 \cdot 5^2 \cdot 9^2 \cdot 13^2}{4^2 \cdot 8^2 \cdot 12^2 \cdot 16^2} + \dots$

अथवा

3. (a) दर्शाइए कि : Show that :

$$\lim \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right] = 0.$$

- (b) दर्शाइए कि श्रेणी : Show that the series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} [\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n}]$$

अर्द्धअभिसारी है। is semiconvergent.

खण्ड-स (Section-C)

4. (a) दर्शाइए कि किसी समूह G के किन्हीं दो उपसमूहों का सर्बनिष्ठ भी G का एक उपसमूह होता है। Show that the intersection of any two subgroup of a group G is also a subgroup of G .
- (b) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ द्विचर संक्रिया X_7 के सापेक्ष 6 क्रम का एक परिमित अबेलियन समूह है। Prove that the set $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ is a finite abelian group of order 6 with respect to binary operation x_7 .
5. (a) सिद्ध कीजिए कि अभाज्य क्रम का प्रत्येक समूह चक्रीय होता है। Prove that every group of prime order is cyclic.
- (b) कैले के प्रमेय का कथन करते हुए उसे सिद्ध कीजिए। State and prove Cayley's theorem.

खण्ड-द (Section-D)

6. (a) वलय R के किसी अरिक्त उपसमुच्चय S के लिए R का उपवलय होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त शर्तें हैं : The necessary and sufficient conditions for a nonempty subset S of a ring R to be a subring of R are :
- (i) $a \in S, b \in S \Rightarrow a - b \in S$
- (ii) $a \in S, b \in S \Rightarrow ab \in S$.
- (b) दर्शाइए कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णाकीय डोमेन होता है। Show that every field is an integral domain.
7. (a) एक वलय R की गुणजावली को परिभाषित कीजिए तथा दर्शाइए कि वलय R की प्रत्येक गुणजावली R का उपवलय भी होती है। Define an ideal of a ring R and show that every ideal of ring R is also a subring of R .
- (b) एक समूह के केन्द्र को परिभाषित कीजिए तथा दर्शाइए कि समूह G का केन्द्र Z , G का प्रसामान्य उपसमूह होता है। Define centre of a group and show that centre Z of a group G is a normal subgroup of G .

खण्ड-इ (Section-E)

8. (a) यदि $\tan(\theta + \phi i) = \tan \alpha + i \sec \alpha$, तब सिद्ध कीजिए कि :
If $\tan(\theta + \phi i) = \tan \alpha + i \sec \alpha$, then prove that :

$$2\theta = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

- (b) सिद्ध कीजिए कि Prove that :

$$\log \left[\frac{\sin(x + iy)}{\sin(x - iy)} \right] = 2i \tan^{-1}(\cot x \tanh y).$$

9. (a) $\tan^{-1}(x + iy)$ को वास्तविक एवं काल्पनिक भागों में प्रदर्शित कीजिए। Express $\tan^{-1}(x + iy)$ in real and imaginary parts.
- (b) निम्न श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए: Sum of the following series :

$$\cos \alpha + c \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2!} c^2 \cos(\alpha + 2\beta) + \dots \infty.$$