B.A/B.Sc. I Examination, 2017 (*Unified Syllabus*)

Mathematics-I Algebra and Trigonometry

Time : 3 Hrs.] **(AB-126)** **[M.M. : 33/65**

Note : इस प्रश्न-पत्र को पाँच खण्डों -अ, ब, स, द तथा इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। This paper is divided into five Sections-A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these ten parts are compulsory. Sections-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt one question from each Section. Answer must be descriptive.

खण्ड-अ (Section-A)

इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1.3/2½ अंक का है। This Section contains one question of ten parts requiring short answers. Each part carries 1.3/2½ marks.

1.(i) किसी समुच्चय द्वारा पालन किए जाने वाले समूह के नियमों की कथनस्थिति दीजिए। State the axioms which a set must obey so that it may form a group.

(ii) क्रमसंचय : Decompose the permutation :

$\begin{pmatrix} 1234567 \\ 6524317 \end{pmatrix}$ का क्रम परिवर्तन (ट्रांसपोजीशन) में विलगन कीजिए। into transpositions.

(iii) अनन्त श्रेणी के लिए अनुपात परीक्षण को परिभाषित कीजिए। Define ratio test for Infinite series.

(iv) यदि $S_n = \dfrac{2n}{n+4n^{1/2}}$, सिद्ध कीजिए कि $< S_n >$ अभिसारी है। If $S_n = \dfrac{2n}{n+4n^{1/2}}$, prove that $< S_n >$ is convergent.

(v) सिद्ध कीजिए कि एक समूह G अबेलियन है, यदि : Prove that a group G is abelian, if :

$$b^{-1}a^{-1}ba = e \;\forall\, a, b \in G$$

(vi) दर्शाइए कि किसी अबेलियन समूह का प्रत्येक उपसमूह, प्रसामान्य उपसमूह होता है। Show that every subgroup of an abelian group is normal.

(vii) किसी वलय R के गुणजावली को दर्शाइए। Define ideals of a ring R.

(viii) क्षेत्र को दर्शाइए। Define field.

(ix) सिद्ध कीजिए कि : Show that :

$$\sin h\,(x+y)\cosh(x-y) = \frac{1}{2}(\sinh 2x + \sinh 2y).$$

(x) श्रेणी के अनन्त पदों का योग ज्ञात कीजिए: Sum to infinity the series :

$$1 - \frac{1}{3.4^2} + \frac{1}{5.4^4} - \ldots ad\ .int.$$

खण्ड-ब, स, द एवं इ (Sections-B, C, D & E)

प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। Each Section contains two questions. Attempt one question from each Section. Each question carries 5/10 marks. Answer must be descriptive.

खण्ड-ब (Section-B)

2.(a) दर्शाइए कि अनुक्रम $< S_n >$ जहाँ: Show that the sequence $< S_n >$ defined by :

$$S_n = \left\{ \sqrt{(n+1)} - \sqrt{n} \right\} \forall\, n \in N$$

अभिसारी है। is convergent.

(b) सिद्ध कीजिए कि : Prove that :

$$\left[\frac{(3n)!}{(n!)^3}\right]^{1/n} = 27.$$

3.(a) $\sum\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n x^n, (x>0)$ के अभिसारण के लिए परीक्षण कीजिए। Test for convergence $\sum\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n x^n, (x>0)$.

(b) दर्शाइए कि श्रेणी : Show that the series :

$$\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$$

शर्तों के आधार पर अभिसारित है। is conditionally convergent.

खण्ड-स (Section-C)

4.(a) लेग्रांज प्रमेय को दर्शाइए और सिद्ध कीजिए। State and prove Lagrange's theorem.

(b) सिद्ध कीजिए कि किसी चक्रीय समूह का प्रत्येक उपसमूह भी चक्रीय होता है।
Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.

5.(a) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के किन्हीं दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।
The intersection of any two normal subgroups of a group is a normal subgroup, Prove it.

(b) सिद्ध कीजिए कि सभी धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय एक अबेलियन समूह है यदि कम्पोजिशन $a * b = (ab)/2$ द्वारा दी गई है। Show that the set of all positive rational numbers forms an abelian group under the composition defined by $a * b = (ab)/2$.

खण्ड-द (Section-D)

6.(a) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित कॉम्यूटेटिव वलय बिना शून्य भाजकों के एक क्षेत्र होता है।
Prove that every finite commutative ring without zero divisions is a field.

(b) दर्शाइए कि $a + b\sqrt{2}$ प्रकार की संख्याएँ, जहाँ a तथा b परिमेय संख्याएँ हैं, का समुच्चय एक क्षेत्र होता है।
Show that the set of numbers of the form $a + b\sqrt{2}$, with a and b as rational numbers is a field.

7.(a) सिद्ध कीजिए कि किसी वलय R के किन्हीं दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ भी एक गुणजावली होता है।
Prove that the intersection of two ideals of a ring R is an ideal of R.

(b) दर्शाइए कि समुच्चय $R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, '$+_6$' और 'X_6' दो वलय कम्पोजिशन्स के साथ एक कॉम्यूटेटिव वलय है।
Show that the set $R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, is a commutative ring with respect to '$+_6$' and 'X_6' as the two ring compositions.

खण्ड-इ (Section-E)

8.(a) आयलर प्रमेय को कथन सहित सिद्ध कीजिए। State and prove Euler's theorem.

(b) यदि $\tan(\theta + i\phi) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ सिद्ध कीजिए कि : If $\tan(\theta + i\phi) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ prove that :

$$\theta = \frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \text{ and } \phi = \frac{1}{2}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

9. (a) श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए : Sum the series :

$$1 + e^{\cos\alpha}\cos(\sin\alpha) + \frac{1}{2!}e^{2\cos\alpha}\cos(2\sin\alpha) + \ldots + \text{ad inf.}$$

(b) यदि $i^{i^{i\ldots\text{ad. inf}}} = A + iB$, सिर्फ वास्तविक मान को लेते हुए सिद्ध कीजिए कि :

If $i^{i^{i\ldots\text{ad. inf}}} = A + iB$, principal values only being considered, prove that :

(i) $\tan\frac{\pi A}{2} = B/A$

(ii) $A^2 + B^2 = e^{-\pi\beta}$