B.A/B.Sc. I Examination, 2016 (*Unified Syllabus*)

Mathematics-I Algebra and Trigonometry

Time : 3 Hrs.] **(AB-126)** **[M.M. : 33/65**

Note : इस प्रश्न-पत्र को पाँच खण्डों -अ, ब, स, द तथा इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। This paper is divided into five Sections-A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these ten parts are compulsory. Sections-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt one question from each Section. Answer must be descriptive.

खण्ड-अ (Section-A)

इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1.3/2½ अंक का है। This Section contains one question of ten parts requiring short answers. Each part carries 1.3/2½ marks.

1.(i) कैले प्रमेय का कथन लिखिए। State Cayley's theorem.

(ii) दर्शाइए कि अनुक्रम $\langle \frac{1}{n} \rangle$ की सीमा शून्य है। Show that the sequence $\langle \frac{1}{n} \rangle$ has the limit 0.

(iii) डी'एलम्बर्ट के रेशो परीक्षण का कथन कीजिए। State D' Alembert's Ratio test.

(iv) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के किन्हीं दो तत्वों a व x के लिए, तत्व a तथा $x^{-1}ax$ के क्रम बराबर हैं। Prove that the orders of the elements a and $x^{-1}ax$ are the same where a, x are any two elements of a group.

(v) श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए: Test for the convergence the series :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{1+2\sqrt{3}}+\frac{3}{1+3\sqrt{4}}+\ldots..$$

(vi) दर्शाइए कि :Show that :

$$\sinh(x+y)\cosh(x-y)=\frac{1}{2}(\sinh 2x+\sinh 2y).$$

(vii) सिद्ध कीजिए कि यदि समूह G के प्रत्येक तत्व a के लिए $a^2=e$, तब G एक अबेलियन समूह है। Prove that if for every a in a group G, $a^2=e$, then G is an abelian group.

(viii) दर्शाइए कि अनुक्रम $\langle S_n \rangle$, जहाँ $S_n=\frac{3n}{n+5n^{1/2}}$ की सीमा 3 है।

Show that the sequence $\langle S_n \rangle$, where $S_n=\frac{3n}{n+5n^{1/2}}$ has the limit 3.

(ix) सिद्ध कीजिए कि : Prove that :

$$\text{iog}(1+i)=\frac{1}{2}\log 2+i\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right).$$

(x) सिद्ध कीजिए कि किसी वलय के लिए $a, b, c \in R$ तब : If R is a ring, then prove that for all $a, b, c \in R$:

(i) a0 = 0a = 0. (ii) a (b - c) = ab - ac.

खण्ड-ब, स, द एवं इ (Section-B, C, D & E)

प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। Each Section contains two question. Attempt one question from each Section. Each question carries 5/10 marks. Answer must be descriptive.

खण्ड-ब (Section-B)

2.(a) लेग्रांज प्रमेय को कथन सहित सिद्ध कीजिए। State and prove Lagrange's theorem.

(b) दर्शाइए कि निम्न श्रेणी प्रतिबन्धी अभिसारी है : Show that the following series is conditionally convergent :

$$\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\infty$$

3.(a) निम्न श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए: Test for convergence the following series :

$$\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}x+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}x^2+\ldots$$

(b) कौशी के मूल परीक्षण को कथन सहित सिद्ध कीजिए। State and prove Cauchy's root test.

खण्ड-स (Section-C)

4.(a) दर्शाइए कि समूह $G = \{1, \omega, \omega^2\}$, जहाँ ω इकाइयाँ का एक काल्पनिक तृतीय मूल है, एक गुणात्मक समूह है। Show that the set $G = \{1, \omega, \omega^2\}$, where ω is an imaginary cube root of units is a group with respect to multiplication.

(b) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के किन्हीं दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी एक प्रसामान्य उपसमूह होता है। The intersection of any two normal subgroups of a group is a normal subgroup, prove it.

5.(a) सिद्ध कीजिए कि यदि f समूह G का समूह G' में कर्नल K के साथ एक होमोमॉर्फिज्म है, तब कर्नल K एक प्रसामान्य उपसमूह होगा। If f is a homomorphism of a group G into a group G' with kernel K, then K is a normal subgroup of G, prove it.

(b) दर्शाइए कि सभी पूर्णाकों का समुच्चय I द्विचर संक्रिया *, जो $a * b = a + b + 1 \forall a, b \in I$ के द्वारा परिभाषित है, के सापेक्ष एक समूह है। Show that the set I of all integers is group with respect to binary operation * defined by $a * b = a + b + 1 \forall a, b \in I$.

खण्ड-द (Section-D)

6.(a) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय डोमेन एक क्षेत्र होता है। Prove that every finite integral domain is a field.

(b) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का प्रत्येक समकारिता प्रतिबिम्ब, समूह G के किसी कौशेंट समूह के आइसोमॉर्फिक होता है। Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to same quotient group of G.

7.(a) सिद्ध कीजिए कि एक वलय के दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है। The intersection of any two subrings of a ring is a subring, prove it.

(b) सिद्ध कीजिए कि सभी आव्यूहों $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, जहाँ a और b पूर्णांक हैं, के समूह का उपसमूह S एक 2×2 के सभी आव्यूहों के वलय का उपवलय होता है। यह भी सिद्ध कीजिए कि S न ही एक दायीं गुणजावली है और न ही एक बायीं गुणजावली है। Prove that the subset S of all matrices of the form $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ with a and b integers, form a subring of the ring of all 2×2 matrices having elements as integers. Prove also that S is neither a right ideal nor a left ideal in R.

खण्ड-इ (Section-E)

8.(a) यदि $\cosh \alpha = \sec \theta$, सिद्ध कीजिए कि : If $\cosh \alpha = \sec \theta$, that

$$\tanh^2 \frac{\alpha'}{2} = \tan^2 \frac{\theta}{2}.$$

(b) $\sin^2 (x + iy)$ को वास्तविक एवं काल्पनिक भागों में विश्लेषित कीजिए। Resolve $\sin^2 (x + iy)$ into real and imaginary parts.

). (a) श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए : Sum the series :

$$1 + e^{\cos \alpha} \cos(\sinh) + \frac{1}{\alpha!} e^{2\cos\alpha} \cos(2\sin\alpha) + \ldots + \text{ad inf.}$$

(b) दर्शाइए कि : Show that :

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots + ad.inf$$

2.(a