

B.A/B. Sc. I Year Examination, 2015 (Unified Syllabus)

Mathematics-I Algebra and Trigonometry

Time : 3 Hrs.]

(AB-126)

[M.M. : 33/65]

नोट: इस प्रश्न पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। खण्ड-अ

नोट: इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1.3/2.5 अंक का है।

1. (a) दर्शाइए कि श्रेणी : Show that the series :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots$$

पूर्णरूप से अभिसारित है। is absolutely convergent.

- (b) अभिसारित अनुक्रम को परिभाषित कीजिए। Define convergent sequence.
(c) क्रमसंचय का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए : Find the inverse of permutations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

- (d) सिद्ध कीजिए कि एक समूह के तत्व a का क्रम वही होगा जैसा कि इसके व्युत्क्रम a^{-1} का है।
Prove that the order of an element a of a group is the same as that of its inverse a^{-1} .
(e) किसी समूह में उपसमूह के सहसमुच्चयों को परिभाषित कीजिए। Define cosets of a subgroup in a group.
(f) किसी सीमित समूह G के प्रसामान्य उपसमूह H के लिए सिद्ध कीजिए कि :
For any normal subgroup H of a finite group G , prove that :

$$o(G/H) = \frac{o(G)}{o(H)}$$

- (g) पूर्णाकीय डोमेन को परिभाषित कीजिए। Define integral domain.

- (h) $\sinh z$ को वास्तविक एवं काल्पनिक खण्डों में विश्लेषित कीजिए।

To separate $\sinh z$ into real and imaginary parts.

- (i) सिद्ध कीजिए कि समूह में सर्वसमता अवयव अद्वितीय होता है।

The identify element in a group is unique.

- (j) सिद्ध कीजिए कि : Prove that : $i^i = e^{-(4n+1)\pi/2}$.

खण्ड-ब, स, द, इ

नोट: प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है।

खण्ड-ब

2. (a) कैले-हैमिल्टन प्रमेय को कथन सहित सिद्ध कीजिए। State and prove Cayley-Hamilton theorem.
(b) सिद्ध कीजिए कि : Prove that :

$$\lim \left[\left(\frac{2}{1} \right) \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \dots \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right]^{1/n} = e.$$

उपयोग में आने वाली प्रमेय के कथन सहित। with the statement of the theorem using in it.

3. निम्नलिखित श्रेणियों की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए : Test convergence of the following series :

(a) $1 + \frac{3}{7}x + \frac{3}{7} \cdot \frac{6}{10}x^2 + \frac{3.6.9}{7.10.13}x^3 + \frac{3.6.9.12}{7.10.13.16}x^4 + \dots \infty$

(b) $\sum \frac{n!x^n}{3.5.7 \dots (2n+1)}$

खण्ड-स

BA/B.Sc. I Mathematics 2015/6P

- (a) n चिह्नों पर, $n!$ क्रमसंचयों में से $\frac{1}{2}n!$ सम क्रमसंचय एवं $\frac{1}{2}n!$ विषम क्रमसंचय हैं।
- Of the $n!$ permutations on n symbols, $\frac{1}{2}n!$ are even permutations and $\frac{1}{2}n!$ are odd permutations.
- (b) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के अनिश्चित उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी एक उपसमूह होता है। Arbitrary intersection of subgroup i.e. the intersection of any family of subgroups of a group is a group.
5. (a) समूह के लिए होमोमॉर्फिज्म की मूल प्रमेय को कथन सहित सिद्ध कीजिए।
State and prove fundamental theorem on homomorphism of groups.
- (b) यदि a एवं x किसी समूह G के दो अवयव हैं, तो सिद्ध कीजिए कि : If a and x are any two elements of a group G , then prove that : $o(x^{-1}ax) = o(a)$. खण्ड-द
6. (a) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णाकीय डोमेन होता है। Prove that every field is an integral domain.
- (b) दर्शाइए कि $(F, +, \cdot)$ एक क्षेत्र है, यदि : Show that $(F, +, \cdot)$ is a field if : $F = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$
7. (a) किसी समूह G में कर्नल K के साथ, समूह G के होमोमॉर्फिज्म के लिए, आइसोमॉर्फिज्म होने की आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त है कि $K = \{e\}$ । The necessary and sufficient condition for a homomorphism f of group G into a group G' with kernel K to be an isomorphism of G into G' is that $K = \{e\}$.
- (b) दर्शाइए कि एक के चार चतुर्थ मूल $1, -1, i, -i$ गुणक के सापेक्ष एक समूह बनाता है। Show that the four fourth roots of unity namely $1, -1, i, -i$ form an abelian group with respect to multiplication. खण्ड - इ
8. (a) यदि $\cosh u = \sec \theta$, तब दर्शाइए कि : If $\cosh u = \sec \theta$, then show that :
(i) $u = \log \tan(\pi/4 + \theta/2)$, (ii) $\tanh^2(u/2) = \tan^2 \theta/2$.
- (b) यदि $i^{\alpha+i\beta} = e^x(\cos x + i \sin y)$, तब सिद्ध कीजिए कि : If $i^{\alpha+i\beta} = e^x(\cos x + i \sin y)$, then prove that :
 $x = -\frac{1}{2}(4n+1)\pi\beta$ and $y = \frac{1}{2}(4n+1)\pi\alpha$.
9. (a) सिद्ध कीजिए कि : Prove that : $\sin^{-1}(\cos e\theta) = \left\{2n + (-1)^n\right\} \frac{1}{2}\pi + i(-1)^n \log \cot \frac{\theta}{2}$.
- (b) श्रेणी का योग कीजिए : Sum the series :
(i) $\cos \alpha - \frac{\cos(\alpha + 2\beta)}{3!} + \frac{\cos(\alpha + 4\beta)}{5!} + \dots + \text{ad inf.}$
(ii) $\sin \alpha - \frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{3!} + \frac{\sin(\alpha + 4\beta)}{5!} + \dots + \text{ad inf.}$