

Time: Three Hours

(AB-126)

Note: This paper is divided into five Sections—A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these ten parts are compulsory. Section-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt one question from each Section. Answer must be descriptive. इस प्रश्न-पत्र को पाँच खण्डों—अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्ड-ब, स, द एवं इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

Section-A

Note: This Section contains one question of ten parts requiring short answers. Each part carries 1.3/2 marks. इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1.3/2 अंक का है।

1. (a) Show that the sequence $\langle S_n \rangle$, where $S_n = \frac{2n^2+1}{2n^2-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ converges to 1.

दर्शाए कि अनुक्रम $\langle S_n \rangle$ जहाँ $S_n = \frac{2n^2+1}{2n^2-1}, \forall n \in \mathbb{N}$, 1 पर अभिसारित होती है।

(b) Define Raabe's Test for infinite series. अनन्त श्रेणी के लिए रेबीज परीक्षण को परिभाषित कीजिए।

(c) Prove that the identity element of a group is unique.

सिद्ध कीजिए कि समूह में सर्वसमता अव्यव अद्वितीय होता है।

(d) Find the inverse of the following permutation: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

निम्नलिखित क्रमचय का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(e) Define order of an element of a group. Find the order of each element in the multiplicative group $G = \{1, \omega, \omega^2\}$, where $\omega^3=1$. समूह के प्रत्येक अवयव का क्रम परिभाषित कीजिए। गुणात्मक समूह $G = \{1, \omega, \omega^2\}$ के प्रत्येक अवयव का क्रम ज्ञात कीजिए जहाँ $\omega^3=1$.

(f) Define cosets of a group with examples. समूह के लिए cosets उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।

(g) State Fundamental Theorem of Homomorphism of groups.

समूह के लिए होमोमोर्फिसम की मूल प्रमेय की कथनस्थिति दीजिए।

(h) If a, b, c, d are elements of a ring R , then evaluate $(a+b)(c+d)$.

यदि a, b, c, d वलय R के अवयव हैं तो $(a+b)(c+d)$ का मान ज्ञात कीजिए।

(i) Resolve $e^{\sin(x+iy)}$ into real and imaginary parts.

$e^{\sin(x+iy)}$ को वास्तविक एवं काल्पनिक भागों में विघटित कीजिए।

(j) Prove that : सिद्ध कीजिए :

$$\log\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right) = 2i \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Section-B, C, D, E

Note: Each section contains two questions. Attempt one question from each Section. Each question carries 5/10 marks. प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

Section-B

2. (a) If a sequence $\langle S_n \rangle$ converges to 1, then prove that the sequence $|S_n|$ converges to 1.
 यदि एक अनुक्रम $\langle s_n \rangle$, 1 पर अभिसरित होता है तो अनुक्रम $|S_n|$, 1 पर अभिसरित होता है सिद्ध कीजिए।
 (b) Test the convergence of the following series whose n^{th} term is: $(n^3+1)^{1/3}-n$.
 निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए जिसका $n^{\text{वाँ}}$ पद है: $(n^3+1)^{1/3}-n$.

3. (a) Test the convergence for the series: $1 + \frac{2x}{2} + \frac{3^2x^2}{3} + \frac{4^3x^3}{4} + \frac{5^4x^4}{5} + \dots$

श्रेणी के लिए अभिसरण का परीक्षण कीजिए: $1 + \frac{2x}{2} + \frac{3^2x^2}{3} + \frac{4^3x^3}{4} + \frac{5^4x^4}{5} + \dots$

- (b) Show that the series $\sum (-1)^n \left[\sqrt{(n^2+1)} - n \right]$ is conditionally convergent.

दर्शाए कि श्रेणी $\sum (-1)^n \left[\sqrt{(n^2+1)} - n \right]$ शर्तों के आधार पर अभिसरित है।

Section-C

4. (a) Show that the four fourth roots of unity namely 1, -1, i, -i form a group with respect to multiplication.
 दर्शाए कि एक के चार चतुर्थ मूल 1, -1, i, -i गुणक के सापेक्ष एक समूह बनाता है।
 (b) If in a group G, $a^5 = e, aba^{-1} = b^2$ for $a, b \in G$, find $O(b)$. यदि एक समूह G में, $a^5 = e, aba^{-1} = b^2$ for $a, b \in G$,
 b का क्रम ज्ञात कीजिए।
 5. (a) Prove that the order of each subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group.
 सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सीमित समूह के उपसमूह का क्रम समूह के क्रम का संभाग होता है।

Section-D

6. (a) Every group of prime order is cyclic. प्रत्येक उत्कृष्ट क्रम का समूह चक्रीय होता है।
 (b) The intersection of any two normal Subgroups of a group is a normal subgroup. Prove it.
 दर्शाए कि किसी समूह के प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी एक प्रसामान्य उपसमूह होता है। सिद्ध कीजिए।
 7. (a) Define Integral domain write, examples. पूर्णांकिय डोमेन को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।
 (b) Let S_1 and S_2 be ideals of a ring R and let $S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$ then $S_1 + S_2$ is an ideal of R generated by $S_1 \cup S_2$. Prove it. माना S_1 और S_2 किसी वलय R की दो गुणजावालिया है और $S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$ तो सिद्ध कीजिए $S_1 + S_2$ वलय R की $S_1 \cup S_2$ द्वारा जनित गुणजावली है।

Section-E

8. (a) If $\tan(\theta + i\phi) = \tan(\alpha + i\sec\alpha)$ then prove that $e^{2\phi} = \pm \cot \frac{1}{2}\alpha$ and $2\theta = n\pi + \frac{1}{2}\pi + \alpha$.

यदि $\tan(\theta + i\phi) = \tan(\alpha + i\sec\alpha)$, तब सिद्ध कीजिए $e^{2\phi} = \pm \cot \frac{1}{2}\alpha$ और $2\theta = n\pi + \frac{1}{2}\pi + \alpha$.

- (b) Prove that: सिद्ध कीजिए।

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \dots + \text{ading}$$

9. (a) Sum the series: श्रेणी का योग कीजिए:
 $1 + c \cosh \theta + c^2 \cosh 2\theta + c^3 \cosh 3\theta + \dots + \text{to } n \text{ terms.}$

(b) Show that: $\tan \left(i \log \frac{a-ib}{a+ib} \right) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$.

दर्शाए कि: $\tan \left(i \log \frac{a-ib}{a+ib} \right) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$