

17

B.A. / B.Sc. I Year Examination, 2013 (Unified Syllabus)
MATHEMATICS - I
(Algebra and Trigonometry)

Time: 3 Hours

(AB-126)

[M.M: B.A. 33/B.Sc. 65]

Note: This paper is divided into two Section-A and B. Section-A contains Short Answer Questions and Section-B contains Descriptive Answer Questions. Attempt both the Sections as per instructions. इस प्रश्न-पत्र को दो खण्डों-अ तथा ब में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ में लघु उत्तरीय प्रश्न तथा खण्ड-ब में विस्तृत उत्तरीय प्रश्न हैं। सभी खण्डों को निर्देशानुसार हल कीजिए।

Note: This Section has one question. This question contains ten parts. All parts are compulsory. Each part carries 1/2 marks. इस खण्ड में एक प्रश्न है। इस प्रश्न के दस भाग हैं। सभी भाग अनिवार्य हैं। प्रत्येक भाग 1/2 अंक का है।

Section-A

(a) If $|r| < 1$, show that: यदि $|r| < 1$, दर्शाइए कि: $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.

(b) Test for convergence the following series: निम्न श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n^2-1)^{1/3}}{(3n^3+2n+5)^{1/4}}$$

(c) Test for convergence the series whose n th term is:

उस श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए, जिसका n वाँ पद है: $(n^3+1)^{1/3} - n$.

(d) Show that $(I, +)$ is a group, if: दर्शाइए कि $(I, +)$ एक समूह है, यदि: $I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

(e) Of the $|n|$ permutations on n symbols, $|n|/2$ are even permutations and $|n|/2$ are odd permutation. n चिहनों पर, $|n|$ क्रमसंचय में से $|n|/2$ सम क्रमसंचय हैं एवं $|n|/2$ विषम क्रमसंचय हैं।

(f) If the element a of a group G is of order n , then $a^m = e$ iff n is a divisor of m . यदि किसी समूह G के तत्व a का ऑर्डर n है, $a^m = e$ यदि एवं केवल यदि तो n, m का भाजक है।

(g) Show that the intersection of any two normal subgroups of a group is a normal subgroup. दर्शाइए कि एक समूह के किन्हीं दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

(h) Prove that a skew-field has no divisors of zero. सिद्ध कीजिए कि एक स्क्यू-क्षेत्र में शून्य के भाजक नहीं होते।

(i) Show that: दर्शाइए कि: $\sinh(x+y) \cosh(x-y) = \frac{1}{2}(\sinh 2x + \sinh 2y)$.

(j) Sum to infinity the series: श्रेणी का अनन्त तक योग ज्ञात कीजिए: $1 - \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \frac{1}{5 \cdot 4^4} - \dots$ ad. inf.

Section-B

Note: This Section is divided into four Units. Each Unit contains two questions. Attempt any one question from each Unit. Answer must be descriptive. Each question carries 5/10 marks. इस खण्ड को चार इकाइयों में विभाजित किया गया है। प्रत्येक इकाई में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक इकाई से कोई एक प्रश्न हल कीजिए। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है।

Unit-I

2 (a) Show that the sequence $\langle s_n \rangle$ defined by: दर्शाइए कि अनुक्रम $\langle s_n \rangle$ जहाँ पर:

$$s_n = \sqrt{(n+1)} - \sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

is convergent. अभिसारी है।

(b) Test for the convergence the series: श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \cdot x^n, (x > 0)$.

3. (a) Test for convergence the series: श्रेणी की अभिसरिता का परीक्षण कीजिए:

$$\frac{1^2}{4^2} + \frac{1^2 \cdot 5^2}{4^2 \cdot 8^2} + \frac{1^2 \cdot 5^2 \cdot 9^2}{4^2 \cdot 8^2 \cdot 12^2} + \frac{1^2 \cdot 5^2 \cdot 9^2 \cdot 13^2}{4^2 \cdot 8^2 \cdot 12^2 \cdot 16^2} + \dots$$

(b) Prove that the relation "congruence modulo m " is an equivalence relation in the set of integers. सिद्ध कीजिए कि रिलेशन "कॉन्ग्रुअंस मॉड्युलो m " पूर्णाकों के समुच्चय में एक एक्वीवैलेंस रिलेशन है।

Unit-II

4. (a) The necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a group G to be a subgroup of G is that: समूह G के किसी अखिन्न उपसमुच्चय H के समूह G का उपसमूह होने की आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त है कि: $ab^{-1} \in H \forall a \in H, b \in H$.
 (b) Show that $G = \{A_\alpha : \alpha \in R\}$ forms a group with respect to multiplication, where:

दर्शाए कि $G = \{A_\alpha : \alpha \in R\}$, आव्यूह की गुणा के साथ एक समूह बनाता है, जबकि $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$.

5. (a) State and prove Lagrange's theorem. लेग्रान्ज प्रमेय का कथन लिखिए एवं उसे सिद्ध कीजिए।
 (b) If H and K are finite subgroups of a group G , then: यदि H तथा K एक समूह G के परिमित उपसमूह हैं, तब:

$$o(HK) = \frac{o(H)o(K)}{o(H \cap K)}$$

Unit-III

6. (a) Prove that the intersection of two subrings of a ring is also a subring. सिद्ध कीजिए कि एक वलय के दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है।
 (b) Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G . सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G की प्रत्येक समाकारिता प्रतिबिम्ब, समूह G के किसी कौशेट समूह के आइसोमॉर्फिक होती है।

7. (a) Prove that the ring of integers is a principal ideal ring. सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों का वलय एक प्रमुख गुणजावली वलय है।

(b) Show that $(F, +, \cdot)$ is a field, if: दर्शाए कि $(F, +, \cdot)$ एक क्षेत्र है, यदि:

$$F = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Q\}$$

Unit-IV

8. (a) If $\cosh u = \sec \theta$, then show that: यदि $\cosh u = \sec \theta$, तब दर्शाए कि:

(i) $u = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$ (ii) $\tanh^2 \left(\frac{u}{2} \right) = \tan^2 \frac{\theta}{2}$

(b) Prove that: सिद्ध कीजिए कि: $\log \left[\frac{\sin(x+iy)}{\sin(x-iy)} \right] = 2i \tan^{-1} (\cot x \tanh y)$.

9. (a) Show that: दर्शाए कि: $\left[1 - \frac{1}{5^{1/2}} \right] - \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{3^{3/2}} \right] + \frac{1}{5} \left[1 - \frac{1}{5^{5/2}} \right] - \dots$ ad. inf. $= \frac{\pi}{12}$.

(b) Sum the series: श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए। $\tan^{-1} \frac{4}{1+3.4} + \tan^{-1} \frac{6}{1+8.9} + \tan^{-1} \frac{8}{1+15.16} + \dots$ + to n terms.