B.A./B.Sc. IInd Year Examination, 2020
Mathematics-IV (Linear Algebra and Matrices)
Time : 3 Hrs.] (AB-226) **[M.M. : 33/65**

Note : This paper is divided into five Sections-A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these ten parts are compulsory. Sections-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt one question from each Section. Answer must be descriptive. इस प्रश्न-पत्र को पाँच खण्डों—अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड—अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों—ब, स, द एवं इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

Section-A

Note : This Section contains one question of *ten* parts requiring short answers. Each part carries 1.3/2.5 marks. इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1.3/2.5 अंक का है।

1. **(i)** Let R be a field of real numbers show that the set $W=\{(x, 2y, 5z): x, y, z \in R\}$ is a subspace of $V_3\ (R)$. यदि R वास्तविक संख्याओं का एक फील्ड है तो सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $W=\{(x, 2y, 5z): x, y, z \in R\}$ एक उपस्पेस है $V_3\ (R)$ का।

(ii) Show that the vectors (1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, – 1, 2) form a basis of R^3. दिखाइए कि सदिश (1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, – 1, 2) एक बेसिस बनाते हैं R^3 का।

(iii) If T is a linear transformation from $U(F) \to V(F)$ then the null space of T is a subspace of U. यदि $T: U(F) \to V(F)$ एक रेखीय प्रतिचित्रण है, तो T का शून्य अन्तरिक्ष U का उपअन्तरिक्ष होगा।

(iv) If T is a linear transformation on a vector space V such that $T^2 - T + I = \hat{O}$ then show that T is invertible. यदि T एक रेखीय प्रतिचित्रण है जहाँ $T^2 - T + I = \hat{O}$ है, तो सिद्ध कीजिए T का व्युत्क्रम सम्भव है।

(v) Obtain the matrix of the quadratic form : इस द्विघातीय रूप का आव्यूह लिखिए— $2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$.

(vi) Define Orthogonal complement of $S \subseteq V(F)$ where V is an inner product space. यदि $V(F)$ एक आन्तरिक गुणन अन्तरिक्ष है तो $S \subseteq V(F)$ के लम्बवत पूरक की परिभाषा बताइए।

(vii) Find the rank of the matrix A : इस आव्यूह A की कोटि ज्ञात कीजिए : $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

(viii) State Cayley-Hamilton's theorem. कैले-हैमिल्टन प्रमेय का कथन लिखिए।

(ix) Determine the eigen-values of the following matrix : निम्न आव्यूह के अभिलक्षणिक मान ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

(x) Write down the quadratic form corresponding to the following matrix. निम्नलिखित आव्यूह के संगत द्विघातीय स्वरूप को लिखिए : $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Section-B, C, D & E

Note : Each Section contains two questions. Attempt one question from each Section. Each question carries 5/10 marks. Answer must be descriptive. प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

Section-B

2. **(a)** If W_1 and W_2 are subspaces of a vector space $V(F)$ then $W_1 \cup W_2$ is a subspace if and only if $W_1 \subseteq W_2$ or $W_2 \subseteq W_1$. यदि W_1 तथा W_2 एक सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हों, तो $W_1 \cup W_2$ भी एक उपसमिष्ट होगा। यदि और केवल यदि $W_1 \subseteq W_2$ या $W_2 \subseteq W_1$।

(b) Find whether vector $2x^3+x^2+x+1, x^3+3x^2+x-2$ and x^3+2x^2-x+3 of $R[x]$ the vector space of all polynomials over the real number field, are linearly independent or not. बताइए एक बहुपदीय के समष्टि $R[x]$ के सदिश $2x^3+x^2+x+1, x^3+3x^2+x-2$ तथा x^3+2x^2-x+3 रेखीय स्वतन्त्र हैं या नहीं।

3. If $U(F)$ and $V(F)$ are two vector space with same dimension n then show that $\dim U=\dim V \Leftrightarrow U(F)\cong V(F)$ where $\cong$ stand for isomorphic of spaces. यदि $\dim U=\dim V$ दिखाइए कि $\dim U=\dim V \Leftrightarrow U(F)\cong V(F)$

Section-C

4. Define Quotient space. Prove that : $\dim V/W=\dim V-\dim W$, where W be a subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$. कौशेण्ट समिष्ट की परिभाषा दीजिए तथा सिद्ध कीजिए : $\dim V/W=\dim V-\dim W$, जहाँ W एक उपसमिष्ट है $V(F)$ का।

5. **(a)** Let T be a linear transformation from a vector space $U(F)$ into a vector space $V(F)$ then : उपरोक्त सिद्ध कीजिए जहाँ T एक रेखीय रूपान्तरण है $U(F)$ से $V(F)$ पर।

(i) $T(O)=\hat{O}$ where $O\in U(F)$ and $\hat{O}\in V(F)$.

(ii) $T(-\alpha)=-T(\alpha)\ \forall\ \alpha\in U(F)$.

(b) If $B=\{(1,-2,3),(1,-1,1),(2,-4,7)\}$ is a basis of R^3 then find the dual basis. यदि $B=\{(1,-2,3),(1,-1,1),(2,-4,7)\}$ R^3 का एक बेसिस है तब द्वैत बेसिस ज्ञात कीजिए।

Section-D

6. **(a)** If α,β are vectors of an inner product space $V(F)$, then prove that : यदि α,β एक आन्तरिक गुणन समष्टि के सदिश है। तब सिद्ध कीजिए :

$$||\alpha+\beta||\le||\alpha||+||\beta||.$$

(b) If α,β are vectors of an inner product space, then show that : यदि α,β एक आन्तरिक गुणन समष्टि के सदिश है। तब सिद्ध कीजिए :

$$||\alpha+\beta||^2+||\alpha-\beta||^2=2||\alpha||^2+2||\beta||^2.$$

7. If $\beta=\{\alpha_1,\ldots\ldots\alpha_m\}$ is any finite orthonormal set in an inner product space V and if β is any vector in V, then prove that : यदि $\beta=\{\alpha_1,\ldots\ldots\alpha_m\}$ एक परिमित आर्थोनॉर्मल सदिश का समुच्चय है किसी आन्तरिक गुणन समिष्ट V के तथा β एक सदिश है V का। तब सिद्ध कीजिए :

$$\sum_{i=1}^{m}|(\beta,\alpha_i)|^2\le||\beta||^2$$

Section-E

8. **(a)** Find the rank of A after reducing it to normal form. नार्मल रूप में परिवर्तित करके आव्यूह की कोटि ज्ञात कीजिए : $A=\begin{bmatrix}0&1&2&-1\\1&0&1&1\\3&1&0&2\\1&1&-2&0\end{bmatrix}$

(b) Use the test of rank, to solve the equations. कोटि परीक्षण से निम्न समीकरण हल कीजिए :

$$2x-y+3z=9$$
$$x+y+z=6$$
$$x-y+z=2$$

9. **(a)** Find the characteristic equation of the matrix A and verify that it is satisfied by A and hence obtain A^{-1}. आव्यूह A के लिए लाक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि यह A के द्वारा सन्तुष्ट होती है। तब A^{-1} ज्ञात कीजिए जहाँ $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&1\\2&0&3\end{bmatrix}$

(b) The characteristic roots of a unitary matrix are of unit modulus. Prove it. ऐकिक आव्यूह के लाक्षणिक मूलों का मापांक इकाई होता है। सिद्ध कीजिए।