



DREAM TOPPER

Best E-learning Platform

Download pdf..

www.dreamtopper.in

SACHIN DAKSH

B.A./B.Sc. II Year Examination, 2019 (Unified Syllabus)

Mathematics-IV Linear Algebra and Matrices

Time : 3 Hrs.]

(AB-226)

[M.M. : 33/65

Note: इस प्रश्न पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

Section-A

Note : इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1-3/2-5 अंक का है।

1. (i) दिखाइए $R(C)$ का वेक्टर स्पेस है/या नहीं है।

Show that R (set of real number) is not a vector space over C (set of complex number).

(ii) दिखाइए कि $V_2(R)$ दिये गये उपरोक्त नियमों के अन्तर्गत वेक्टर स्पेस नहीं है। Show that $V_2(R)$ is not a vector space with the following operation, as $\forall \alpha = (x_1, y_1) \in V_2, \beta = (x_2, y_2) \in V_2$ and $C \in R$ $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (3y_1 + 3y_2, -x_1 - x_2)$, (Vector addition) and $c(x_1, y_1) = (3cy_1, -cx_1)$. (Scalar Multiplication).

(iii) दिखाइये कि W किसी स्पेस V का सब स्पेस नहीं होगा, यदि V एक 2×2 के आव्यूह व $W, 2 \times 2$ के सिंगुलर आव्यूह का समुच्चय है। If V is a vector space of all 2×2 matrices over R and W is a subset of V having singular matrix, then show that W is not a subspace of V .

(iv) किसी स्पेस के उप स्पेस को परिभाषित करो। Define subspace of a vector space.

(v) रेंज व नल स्पेस को परिभाषित करो। Define Range and null space.

(vi) ड्युअल स्पेस किसे कहते हैं? What do you mean by dual space?

(vii) आव्यूह की कोटि को परिभाषित करो। Define Rank of a Matrix.

(viii) कैले-हैमिल्टन प्रमेय का कथन लिखो। State Cayley-Hamilton's theorem.

(ix) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ के अभिलक्षणिक मान क्या हैं? Find the eigen value of the matrix, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(x) $x_1^2 + 5x_2^2 - 7x_3^2$ से सम्बन्धित आव्यूह को लिखो। Obtain the matrix corresponding to the following quadratic form $x_1^2 + 5x_2^2 - 7x_3^2$.

Section-B

Note : प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

2. (a) किसी उपसमुच्चय W को किसी वेक्टर स्पेस $V(F)$ का सबस्पेस होने के लिए आवश्यक व पर्याप्त है- The necessary and sufficient condition for a non-empty subset W of a vector space $V(F)$ to be a subspace is :

$$a, b \in F \text{ and } \alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha a + \beta b \in W.$$

(b) बताइये $W_1 \cup W_2$ कब स्पेस (सब) होगा। सिद्ध भी करो। Under what condition $W_1 \cup W_2$ is a space. If W_1 and W_2 are subspace of $V(F)$. Give proof. अथवा

3. (a) यदि w_1 व w_2 सब स्पेस है तब दिखाओ कि : If w_1 and w_2 are subspace of $V(F)$, then :

(i) $w_1 + w_2$ is also subspace of $V(F)$. (ii) $L(w_1 \cup w_2) = w_1 + w_2$

(b) यदि $\dim w_1 = 4, \dim w_2 = 4$ और $\dim v = 6$ तब $\dim(w_1 \cap w_2)$ की क्या सम्भावना है? If w_1 and w_2 distinct subspace of $V(F)$. Given that $\dim w_1 = 4, \dim w_2 = 4$ and $\dim v = 6$. Find possible $\dim(w_1 \cap w_2)$.

Section-C

4. यदि $\dim U = \dim V$ दिखाइये कि $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U(F) \cong V(F)$. If $U(F)$ and $V(F)$ are two vector space with same dimension n , then show that $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U(F) \cong V(F)$. Where \cong stand for isomorphic of spaces. अथवा

5. कौशेन्ट स्पेस के निर्माण को विस्तार से समझाइये। Define and discuss the construction of Quotient space in detail.

Section-D

6. If $f : V_2(R) \rightarrow V_3(R)$, such that $f(a, b) = (a + b, a - b, b)$ is a linear transformation. Find

(a) Rank of f

(b) Nullity of f

अथवा

7. दिखाइये कि $\dim W + \dim W^\circ = \dim V$, जहाँ W एक V का सब स्पेस है। If W is a subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$, then show that $\dim W + \dim W^\circ = \dim V$, where W° is annihilator of W . **Section-E**

8. (a) उपरोक्त आव्यूह को Hermitian व Skew Hermitian के योग में लिखें।

Express $\begin{bmatrix} -2+3i & 1-i & 2+i \\ 3 & 4-5i & 5 \\ 1 & 1+i & -2+2i \end{bmatrix}$ as a sum of Hermitian and Skew Hermitian matrix.

(b) उपरोक्त आव्यूह की कोटि बताइये। Find the rank of matrix, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$

अथवा

9. (a) Discuss the role of λ and μ in solution of the following equation :

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + \lambda z = \mu$$

to have (a) consistency and (b) Inconsistency.

(b) उपरोक्त आव्यूह के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित करो और A^{-1} बताओ। Verify Cayley-Hamilton theorem

for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ and then find A^{-1} .