DREAM TOPPER
Best E-learning Platform
Download pdf..
Www.dreamtopper.in

SACHIN DAKSH

B. A./B.Sc. II Year Examination, 2018 *(Unified Syllabus)*

Mathematics-IV (Linear Algebra and Matrices)

Time : 3 Hrs.] **(AB-226)** **[M.M. : 33/65**

Note: इस प्रश्न पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

खण्ड-अ (Section-A)

Note : इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1·3/2·5 अंक का है।

1. (i) दिखाइए कि $W = \{(x, y, z) : x - 3y + 4z = 0\}$, R^3 का एक उपअन्तरिक्ष है।
Show that $W = \{(x, y, z) : x - 3y + 4z = 0\}$ is a subspace of R^3.

(ii) दिखाइए कि निम्नलिखित आव्यूहों का समुच्चय, R पर 2×2 आव्यूहों के सदिश अन्तरिक्ष $M_{2\times2}$ का एक बेसिस बनाता है :
Show that the following set of matrices forms a basis for the vector space $M_{2\times2}$ of all 2×2 matrices over R:

$$S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right\}.$$

(iii) दिखाइए कि निम्नलिखित प्रतिचित्रण जोकि इस प्रकार परिभाषित है: Show that the following mapping defined as :

$$T : R^2 \to R^2,\ T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

एक रेखीय ट्रांसफॉर्मेशन है, जहाँ पर $a, b, c, d \in R$ है। is a linear transformation, where $a, b, c, d \in R$.

(iv) किसी रेखीय ट्रासफॉर्मेशन की परास तथा रिक्त स्पेस को परिभाषित कीजिए।
Define range and null space of a linear transformation.

(v) यदि f सदिश अन्तरिक्ष $V(F)$ पर एक रेखीय फंक्शनल है, तो सिद्ध कीजिए कि $f(\bar{0}) = 0$, जहाँ पर $0 \in F, \bar{0} \in V$ है।
Let f be a linear functional on a vector space $V(F)$, then prove that $f(\bar{0}) = 0$, where $0 \in F, \bar{0} \in V$.

(vi) यदि S_1 तथा S_2 सदिश अन्तरिक्ष $V(F)$ के इस प्रकार दो उपसमुच्चय हैं कि $S_1 \subseteq S_2$, तो सिद्ध कीजिए कि $S_2^0 \subseteq S_1^0$ है।
If S_1 and S_2 are two subsets of a vector space $V(F)$ such that $S_1 \subseteq S_2$, then prove that $S_2^0 \subseteq S_1^0$.

(vii) क्या आव्यूह Is the matrix $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\-1 & 0 & 2\\2 & 1 & -3\end{bmatrix}$, I_3 के समतुल्य है? दर्शाइए। is equivalent to I_3 ? Show it.

(viii) निम्नलिखित आव्यूह की रैंक ज्ञात कीजिए: Find the rank of the following matrix :

$$\begin{bmatrix}1 & 5 & 4\\0 & 3 & 2\\2 & 13 & 10\end{bmatrix}.$$

(ix) निम्नलिखित आव्यूह के आइगेन-मान ज्ञात कीजिए: Find the eigenvalues of the following matrix :

$$\begin{bmatrix}a & h & g\\0 & b & 0\\0 & c & c\end{bmatrix}.$$

(x) द्विघात रूप तथा किसी द्विघात रूप के आव्यूह को परिभाषित कीजिए। Define quadratic form and matrix of a quadratic form.

खण्ड-ब (Section-B)

Note : प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

2. (a) सिद्ध कीजिए कि उन सभी सदिशों का समुच्चय जोकि एक तल में है, वास्तविक संख्याओं के फील्ड पर एक सदिश अन्तरिक्ष बनाता है। Prove that the set of all vectors in a plane is a vector space over the field of real numbers.

(b) दिखाइए कि सदिश (1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, –1, 2), R^3 का एक बेसिस बनाते हैं।
Show that the vectors (1, 2, 1) (2, 1, 0), (1, –1, 2) form a basis of R^3.

3. (a) यदि n – विमीय सदिश अन्तरिक्ष V का W एक m – विमीय उपअन्तरिक्ष है, तो सिद्ध कीजिए कि :

Scanned with CamScanner

If W is an m-dimensional subspace of an n-dimensional vector space V, then prove that:

$$\dim (V/W) = n - m.$$

(b) यदि "f" एक होमोमॉर्फिज्म $U(F)$ से $V(F)$ में है, तो सिद्ध कीजिए कि:

If "f" is a homomorphism of $U(F)$ into $V(F)$, then prove that :

(i) $f(0) = 0'$, $0 \in U, 0' \in V$ are zeros of U and V respectively.

(ii) $f(-\alpha) = -f(\alpha) \quad \forall \alpha \in V.$

खण्ड-स (Section-C)

4. (a) यदि $T : U(F) \to V(F)$ एक रेखीय ट्रांसफॉर्मेशन है तथा यदि U एक परिमित विमीय है, तो सिद्ध कीजिए कि T की परास V का एक परिमित विमीय उपअन्तरिक्ष है। If $T : U(F) \to V(F)$ be a linear transformation and if U is finite dimensional, then prove that the range of T is a finite dimensional subspace of V.

(b) यदि $T : U \to V$ तथा $S : V \to W$, रेखीय ट्रांसफॉर्मेशन हैं, तो गुणन (या कम्पोजिट) प्रतिचित्रण ST भी U से W में एक रेखीय ट्रांसफॉर्मेशन होगा, जहाँ पर U, V व W, F पर सदिश अन्तरिक्ष है। If $T : U \to V$ and $S : V \to W$, are linear transformations, then the product (or composite) mapping ST is also a linear transformation from U into W, where U, V and W are vector spaces over the field F.

5. (a) सदिश $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 1, -1)$ व $\alpha_3 = (1, -1, -1)$, $V_3(C)$ का एक बेसिस बनाते हैं। यदि $\{f_1, f_2, f_3\}$ एक ड्युअल बेसिस है तथा $\alpha = (0, 1, 0)$ है, तो $f_1(\alpha), f_2(\alpha)$ व $f_3(\alpha)$ के मान ज्ञात कीजिए। The vectors $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 1, -1)$ and $\alpha_3 = (1, -1, -1)$ form a basis of $V_3(C)$. If $\{f_1, f_2, f_3\}$ is the dual basis and if $\alpha = (0, 1, 0)$, then find $f_1(\alpha), f_2(\alpha)$ and $f_3(\alpha)$.

अथवा

(b) यदि T, R^2 पर परिभाषित एक रेखीय ऑपरेटर है जो परिभाषित है ऐसे $T(a, b) = (4a - 2b, 2a + b)$, तो T का आव्यूह R^2 के मानक बेसिस B के सापेक्ष ज्ञात कीजिए। If T be the linear operator on R^2 defined by $T(a, b) = (4a - 2b, 2a + b)$, then find the matrix of T relative to standard ordered basis B for R^2.

खण्ड-द (Section-D)

6. (a) यदि V' एक समुच्चय है जिसमें V पर परिभाषित सभी रेखीय फंक्शनल हैं तथा V' में जोड़ निम्न प्रकार से परिभाषित है :

If V' is a set of all linear functional on V and the addition in V' is defined as :

$$(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) \quad \forall \alpha \in V \,\&\, f, g \in V'$$

तो दिखाइए कि V' इस तरह परिभाषित जोड़ के सापेक्ष क्लोज्ड है।

then show that V' is closed with respect to additional defined above.

(b) यदि W_1 एवं W_2 एक परिमित विमीय सदिश अन्तरिक्ष V के उपअन्तरिक्ष हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $(W_1 + W_2)^\circ = W_1^\circ \cap W_2^\circ$, जहाँ पर W_1° एवं W_2° सापेक्षतया W_1 एवं W_2 के एनिहिलेटर हैं। If W_1 and W_2 be subspace of a finite dimensional vector space V, then prove that $(W_1 + W_2)^\circ = W_1^\circ \cap W_2^\circ$, where W_1° and W_2° are annihilaters of W_1 and W_2 respectively.

7. (a) निम्नलिखित आव्यूह को कैलन रूप में अपघटित कर इसकी रैंक निकालिए :

Determine the rank of the following matrix by reducing it in Echelon form :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 11 & 6 \end{bmatrix}.$$

अथवा

(b) निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह E –पंक्ति रूपान्तरण विधि से ज्ञात कीजिए :

Find the inverse of the matrix by using E-row transfromations :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

खण्ड-ह (Section-E)

Scanned with CamScanner

8. (a) निम्नलिखित आव्यूह को एक हर्मीशियन तथा एक स्कयू हर्मीशियन आव्यूह के योग के रूप में प्रकट कीजिए :
Express the following matrix as the sum of a Hermitian and a skew-Hermitian matrix:

$$\begin{bmatrix} -2+3i & 1-i & 2+i \\ 3 & 4-5i & 5 \\ 1 & 1+i & -2+2i \end{bmatrix}.$$

(b) निम्नलिखित द्विघातीय रूप का संगत आव्यूह ज्ञात कीजिए :
Find the matrix corresponding to the following quadratic form :

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 .$$

अथवा

9. (a) λ तथा μ के मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए निम्नलिखित समीकरणों के हल निकलते हों (i) कोई हल नहीं (ii) एक अद्वितीय हल (iii) अनन्त हल : Find the values of λ and μ for which the following simultaneous equations have (i) no solution (ii) a unique solution (iii) an infinite number of solutions.

$$x + y + z = 6,\ x + 2y + 3z = 10,\ x + 2y + \lambda z = \mu.$$

(b) निम्नलिखित आव्यूह हेतु कैले-हेमिल्टन प्रमेय को वैरिफाई कीजिए तथा इस प्रकार से A^{-1} ज्ञात कीजिए:
Verify Caley-Hamilton theorem for the following matrix and hence find A^{-1}:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Scanned with CamScanner