DREAM TOPPER
Best E-learning Platform
Download pdf..
Www.dreamtopper.in

B.A/B.Sc. II Year Examination, 2016 (*Unified Syllabus*)

Mathematics-IV Linear Algebra and Matrices

Time : 3 Hrs.] **(AB-226)** **[M.M. : 33/65**

Note : इस प्रश्न-पत्र को पाँच खण्डों -अ, ब, स, द तथा इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। This paper is divided into five Sections-A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these ten parts are compulsory. Sections-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt one question from each section. Answer must be descriptive.

खण्ड-अ (Section-A)

इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भागों के लघु उत्तर अपेक्षित हैं। प्रत्येक भाग 1.3/2½ अंक का है। This Section contains one question of ten parts requiring short answers. Each part carries 1.3/2½ marks.

1.(i) यदि A एक हर्मिटीयन आव्यूह है, तब दर्शाइये iA स्क्यू-हर्मिटीयन आव्यूह है।
If A is a Hermitian matrix, then show that iA is Skew-Hermitian.

(ii) निम्नलिखित आव्यूह की कोटि ज्ञात कीजिए–Find the rank of the following matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

(iii) यदि If $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ दर्शाइये to show $A^3 = 19A + 30\,I$.

(iv) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित आव्यूह A ओर्थोगोनल आव्यूह है।
Prove that the following matrix A is orthogonal matrix.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

(v) यदि $f : U(F) \to V(F)$ एक समरूपता है तब $f(\vec{O}_1) = \vec{O}_2$ जहाँ $\vec{O}_1$ तथा $\vec{O}_2$ क्रमशः U तथ V के शून्य सदिश है।
If $f : U(F) \to V(F)$ is a homomorphism, then $f(\vec{O}_1) = \vec{O}_2$ where $\vec{O}_1$ *and* $\vec{O}_2$ are the zero vectors of U and V respectively.

(vi) सदिश समष्टि के बेसिस को परिभाषित कीजिए। Define the basis of a vector space.

(vii) रेखीय स्वतन्त्र समुच्चय के सभी उपसमुच्चय भी रेखीय स्वतन्त्र होंगे।
All subset of linear independent set is linear independent.

(viii) कोसेन्ट समष्टि को परिभाषित कीजिए। Define quotient space.

(ix) आन्तरिक गुणन समष्टि को परिभाषित कीजिए। Define inner product space.

(x) निम्नलिखित द्विघातीय रूप की आव्यूह लिखिए: Write down the matrix of following quadratic form :

$$4x_1^2 - 6x_1 x_2 - 7x_2^2$$

खण्ड-ब, स, द एवं इ (Section-B, C, D & E)

प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। Each section contains two questions. Attempt one question from each section. Each question carries 5/10 marks. Answer must be descriptive.

खण्ड-ब (Section-B)

2. यदि U एक परिमित डायमेंशनल सदिश समष्टि $V(F)$ का उपसमष्टि है। सिद्ध कीजिए V का एक उपसमष्टि W मिलेगा $V \ni V - U \oplus W$. If U be a subspace of a finite dimensional vector space V(F). Prove that there exists a subspace W of $V \ni V = U \oplus W$.

3. (a) सदिश समष्टि $V(F)$ के एक अरिक्त उपसमुच्चय W उपसमष्टि होने के लिये आवश्यक और पर्याप्त शर्त है।

Scanned with CamScanner

$a, b \in F$ और $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$

The necessary and sufficient condition for an on-empty subset W of a vector space V(F) to be a subspace of V is $a, b \in F$ and $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$.

3. (b) समुच्चय $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\}$ सदिश समष्टि का एक न्यूनतम उत्पादक समुच्चय है यदि और केवल यदि यह एक बेसिस है।
The set $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\}$ is a minimal generating set for vector space V(F) if and only if it is a basis of V.

खण्ड-स (Section-C)

4. यदि $T : V_4(R) \to V_3(R)$ एक रेखीय रूपान्तरण जो $T(a, b, c, d) = (a - b + c + d, a + 2c - d, a + b + 3c - 3d)$ $\forall a, b, c, d \in R$, द्वारा परिभाषित है, तब सत्यापित करें कि $\dim V_4(R) = rank(T) + nullity(T)$

If $T : V_4(R) \to V_3(R)$ is a linear transformation defined by
$T(a, b, c, d) = (a - b + c + d, a + 2c - d, a + b + 3c - 3d) \forall a, b, c, d \in R$, then verify that
$\dim V_4(R) = rank(T) + nullity(T)$

5. सिद्ध कीजिए समुच्चय : $S = \{(1, 1, 1)(1, 1, -1)(1, -1, -1)\}$ सदिश समष्टि $R^3(R)$ का बेसिस है तथा S का द्वैत बेसिस ज्ञात करो। Show that the set $S = \{(1, 1, 1)(1, 1, -1)(1, -1, -1)\}$ is a basis set of vector space $R^3(R)$ and find the dual basis of S.

खण्ड-द (Section-D)

6. (a) आन्तरिक गुणन समष्टि $V(F)$ में, सिद्ध कीजिए : $|<\alpha\ \beta>| \le ||\alpha||\ ||\beta|| \forall \alpha, \beta \in V$
In an inner product space V(F), Prove that $|<\alpha\ \beta>| \le ||\alpha||\ ||\beta|| \forall \alpha, \beta \in V$

(b) सिद्ध कीजिए $<\alpha, \beta> = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$, $V_2(R)$ का आन्तरिक गुणन को स्पष्ट नहीं करता है। जहाँ $\alpha = (a_1\ a_2)$, $\beta = (b_1\ b_2) \in V_2(R)$. Prove that $<\alpha, \beta> = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$ does not define an inner product in $V_2(R)$ Where $\alpha = (a_1\ a_2)$, $\beta = (b_1\ b_2) \in V_2(R)$.

7. (a) आन्तरिक गुणन समष्टि $V(F)$ का आर्थोनोर्मल समुच्चय रेखीय स्वतन्त्र है।
An orthonormal set in an inner product space V(F) is linearly independent.

(b) निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम E-रूपान्तरण का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।
Find the inverse of the following matrix by using E-transformations.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

खण्ड-इ (Section-E)

8. (a) आव्यूह A का लाक्षणिक समीकरण तथा व्युत्क्रम ज्ञात करो : Find the characteristic equation and inverse of matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) दर्शाइए आव्यूह Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ डाइगनोलाइजेबल है। is diagonalizable.

9. (a) λ तथा μ के किन मानो के लिए समीकरण For what values of λ and μ the equations

$$x + y + z = 6$$
$$x + 2y + 3z = 10$$
$$x + 2y + \lambda z = \mu$$

have (i) अद्वितीय हल। unique solution (ii) असंख्य हल। an infinite number of solution
(iii) कोई हल नहीं। no solution.

(b) आव्यूह A की कोटि ज्ञात करो जहाँ a, b, c वास्तविक संख्या है। Find the rank of the matrix 'A' where a, b, c are reals. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$

Scanned with CamScanner