DREAM TOPPER
Best E-learning Platform
Download pdf..
Www.dreamtopper.in

SACHIN DAKSH

B. A./B.Sc. II Year Examination, 2015 *(Unified Syllabus)*
Mathematics-IV Linear Algebra and Matrices

Time : 3 Hrs.] **(AB-226)** **[M.M. : 33/65**

नोटः इस प्रश्न पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न हैं, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द तथा इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

खण्ड-अ

नोटः खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी दस भाग अनिवार्य हैं। प्रत्येक भाग 1.3/2.5 अंक का है।

1. (i) दर्शाइए कि समुच्चय $W = \{(x, y, z) : x + y = 0\}$ सदिश समष्टि $V_3(R)$ का उपसमष्टि है।
   Show that the set $W = \{(x, y, z) : x + y = 0\}$ is a subspace of the vector space $V_3(R)$.

   (ii) सदिश समष्टि C (R) की डायमेंशन ज्ञात करो।
   Find the dimension of vector space C (R) .

   (iii) एक रेखीय रुपान्तरण के कर्नेल को परिभाषित कीजिए। Define kernel of a linear transformation

   (iv) दर्शाइए कि प्रतिचित्रण $T : R^2 \to R^2$ जो $T(a, b) = (b, a)$ द्वारा परिभाषित है, एक रेखीय रुपान्तरण है।
   Show that the mapping $T : R^2 \to R^2$ defined as $T(a, b) = (b, a)$ is a linear transformation .

   (v) यदि S एक सदिश समष्टि V(F) का कोई उपसमुच्चय है, तब S^0 $V'(F)$ उपसमष्टि है।
   If S is any subset of a vector space V(F), then S^0 is a subspace of $V'(F)$.

   (vi) आन्तरिक गुणन समष्टि V (F) में, सिद्ध कीजिए : $<O,\beta>=0 \forall \beta \in v$
   In an inner product space $V'(F)$, Prove that : $<O,\beta>=0 \forall \beta \in v$

   (vii) स्क्यू हर्मिशियन आव्यूह के विकर्ण का प्रत्येक तत्व या तो पूर्णतया काल्पनिक या शून्य है। Every diagonal elements of Skew-Hermitian matrix is either purely imaginary or zero.

   (viii) आव्यूह की कोटि को परिभाषित कीजिए। Define the rank of Matrix.

   (ix) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ के लिये कैले हेमिल्टन प्रमेय का सत्यापन कीजिए।
   Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

   (x) दर्शाइए कि हर्मिशियन आव्यूह के लाक्षणिक मूल्य वास्तविक है।
   To show characteristic values of a Hermitian matrix are real.

खण्ड-ब,स, द, इ

नोटः प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न करना है। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है।

खण्ड-ब

2. (a) यदि T एक परिमित डायमेंशनल सदिश समष्टि पर एक रेखीय संकारक है। दर्शाइये T एकैकी है $\Leftrightarrow$ T आच्छादक है। If T be a linear operator on a finite dimensional vector space V(F), show that T is one-one $\Leftrightarrow$ T is onto.

   (b) यदि w एक परिमित डायमेंशनल सदिश समष्टि V(F) का एक उपसमष्टि है। सिद्ध कीजिए : If w be a subspace of a finite dimensional vector space V(F). Prove that : $\dim \frac{v}{w} = \dim v - \dim w$

3. (a) यदि $\alpha = (1, 2, 1), \beta = (2, 9, 0)$ तथा $\gamma = (3, 3, 4)$ दर्शाइए कि $s = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ एक R^3 का बेसिस है।
   If $\alpha = (1, 2, 1), \beta = (2, 9, 0)$ and $\gamma = (3, 3, 4)$. Show that $s = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ is a basis of R^3.

   (b) यदि S तथा T, V(F) के दो अरिक्त उपसमुच्चय है। तब $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$.
   If S and T are two non-empty subset of V(F). Then $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$.

खण्ड-स

Scanned with CamScanner

4. (a) दर्शाइए कि प्रतिचित्रण $T : V_2(R) \to V_3(R)$ जो $T(a,b) = (a + b, a - b, b)$ द्वारा परिभाषित है, एक रेखीय रुपान्तरण है। प्रसार, कोटि, नल समष्टि तथा T की शून्यता ज्ञात कीजिए।

Show that the map $T : V_2(R) \to V_3(R)$ defined as $T(a,b) = (a + b, a - b, b)$ is a linear transformation. Find the range, rank null space and Nullity of T.

(b) यदि U(F) तथा V(F) सदिश समष्टि है तथा $T:U \to V$ एक रेखीय रुपान्तरण है। तब T एकैकी है $\Leftrightarrow$ ker $(T) = \{\vec{o}\}$. If U(F) and V(F) be vector space and $T:U \to V$ is linear transformation. Then T is one-one $\Leftrightarrow$ ker $(T) = \{\vec{o}\}$.

5. माना U(F) तथा V(F) सदिश समष्टि है। माना $\{v_1, v_2, \ldots\ldots v_n\}$ V का एक बेसिस है। यदि $\{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ U का कोई उपसमुच्चय है। तब दर्शाइये कि एक अद्वितीय रेखीय रुपान्तरण $T : V \to U$ मिलेगा जो निम्न शर्त को पूरा करता है।

Let U(F) and V(F) be vector space. Let $\{v_1, v_2, \ldots\ldots v_n\}$ be a basis of V. If $\{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ be any set of arbitrary vectors of U. Then show that there exists a unique linear transformation $T : V \to U$ such that

$$T(v_j) = u_j \; \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

खण्ड-

6. (a) यदि $B = \{(1, -2, 3), (1, -1, 1)\ (2, -4, 7)\}$ R^3 का एक बेसिस है तब द्वैत बेसिस ज्ञात करो।

If $B = \{(1, -2, 3), (1, -1, 1)\ (2, -4, 7)\}$ is a basis of R^3, Then find the dual basis.

(b) माना w_1 तथा w_2 एक सदिश समष्टि V(F) के उपसमष्टि है तब दर्शाइए $(w_1 + w_2)^0 = w_1^0 \cap w_2^0$.

Let w_1 and w_2 be subspace of a vector space V(F). Then show that : $(w_1 + w_2)^0 = w_1^0 \cap w_2^0$

7. (a) यदि α, β एक आन्तरिक गुणन समष्टि के सदिश है। तब सिद्ध कीजिए :

If α, β are vectors in an inner product space V(F). Then prove that :

$$\text{Re} < \alpha\beta > = \frac{1}{4}||\alpha + \beta||^2 - \frac{1}{4}||\alpha - \beta||^2$$

(b) सिद्ध कीजिए दो आव्यूह A, $C^{-1}AC$ समान लाक्षणिक मूल्य रखते हैं।

Show that two matrices A, $C^{-1}AC$ have the same characteristic roots.

खण्ड-

8. (a) सिद्ध कीजिए अदिश λ आव्यूह A का एक लाक्षणिक मूल्य है यदि और केवल यदि $A - \lambda I$ सिंगुलर है।

Prove that the scalar λ is characteristic root of matrix A if and only if $A - \lambda I$ is singular.

(b) निम्नलिखित आव्यूह की कोटि ज्ञात कीजिए : Find the rank of the following matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

9. (a) दर्शाइए समीकरण : Show that the equations :

$$x + 2y - z = 3$$
$$3x - y + 2z = 1$$
$$2x - 2y + 3z = 2$$
$$x - y + z = -1$$

अनुरुप है तथा हल कीजिए। are consistent and solve them.

(b) सिद्ध कीजिए $V_2(R)$ एक आन्तरिक गुणन समष्टि है जब $\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2) \in V_2(R)$ पर आन्तरिक गुणन परिभाषित है : $< \alpha\beta > = 3a_1b_1 + 2a_2b_2$

Prove that $V_2(R)$ is an inner product space when an inner product define on $\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2) \in V_2(R)$ by: $< \alpha\beta > = 3a_1b_1 + 2a_2b_2$

Scanned with CamScanner