DREAM TOPPER

Best E-learning Platform

Download pdf..

Www.dreamtopper.in

SACHIN DAKSH

B.A./B.Sc. II Year Examination, 2014 *(Unified Syllabus)*
Mathematics-IV
Linear Algebra and Matrices

Time: Three Hours **(AB-226)** **M M: 33/65**

Note: This paper is divided into five Sections–A, B, C, D & E. Section-A (Short Answer Questions) contains one question of ten parts requiring short answer. All these **ten** parts are compulsory. Sections-B, C, D & E (Descriptive Answer Questions) each contains two questions. Attempt **one** question from each Section. Answer must be descriptive. इस प्रश्न-पत्र को पाँच खण्डों-अ, ब, स, द एवं इ में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ (लघु उत्तरीय प्रश्न) में एक लघु उत्तरीय प्रश्न है, जिसके दस भाग हैं। ये सभी **दस** भाग अनिवार्य हैं। खण्डों-ब, स, द एवं इ (विस्तृत उत्तरीय प्रश्न) प्रत्येक में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से **एक** प्रश्न कीजिए। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है।

Section-A

Note: This Section contains one question of ten parts. Each part carries 1.3/2½ marks.
इस खण्ड में एक प्रश्न के दस भाग हैं। प्रत्येक भाग 1.3/2½ अंक का है।

1. (a) Show that the set $\{(a,b,c) : a + b + 2c = 0\}$ is a subspace of the vector space $V_3(R)$, where a, b, c are real numbers. दर्शाइए कि समुच्चय $\{(a,b,c) : a + b + 2c = 0\}$ सदिश समष्टि $V_3(R)$ की उपसमष्टि है, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं।

(b) Show that : $S=\{(1,2,4),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ is a linearly dependent subset of vector space $V_3(R)$.
दर्शाइए कि: $S=\{(1,2,4),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ सदिश समष्टि $V_3(R)$ का एक एकघातीय आश्रित उपसमुच्चय है।

(c) Define nullity of a linear transformation. एक रेखीय रूपान्तरण की अक्षमता को परिभाषित कीजिए।

(d) Define dual space. द्वैत समष्टि को परिभाषित कीजिए।

(e) Write down the matrix of the following quadratic form: $x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3-8x_2x_3$.
निम्नलिखित द्विघातीय रूप की आव्यूह लिखिए: .

(f) Define norm of a vector in an inner product space.
किसी आन्तरिक गुणन समष्टि में सदिश के नॉर्म को परिभाषित कीजिए।

(g) Define Hermitian and Skew-Hermitian matrices. हर्मिटीय तथा स्क्यू-हर्मिटीय आव्यूहों को परिभाषित कीजिए।

(h) Find characteristic roots of the matrix. आव्यूह के लाक्षणिक मूल्यों को ज्ञात कीजिए:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

(i) Prove that following matrix A is unitary: सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित आव्यूह A यूनीटरी है:

$$A=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1+i\\ 1-i & -1\end{bmatrix}.$$

(j) Find the rank of the following matrix: निम्नलिखित आव्यूह की कोटि ज्ञात कीजिए:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 7\end{bmatrix}.$$

Section-B, C, D, E

Note: Each section contains two questions. Attempt one question from each Section. Each question carries 5/10 marks. प्रत्येक खण्ड में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है।

Section-B

2. (a) If W_1 and W_2 are subspaces of a vector space $V(F)$, then show that $W_1 \cap W_2$ is also a subspace of $V(F)$

यदि W_1 तथा W_2 एक सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हों, तो दर्शाइए कि $W_1 \cap W_2$ भी $V(F)$ की एक उपसमष्टि होगी।

(b) Show that the vectors (1, 0, -1), (1, 2, 1), (0, -3, 2) from a basis for R^3.

दर्शाइए कि सदिश (1, 0, -1), (1, 2, 1), (0, -3, 2) R^3 के लिए एक बेसिस बनाते हैं।

3. (a) State and prove Dimension theorem for vector spaces.
सदिश समष्टियों की विमा प्रमेय को कथन करते हुए सिद्ध कीजिए।

(b) The necessary and sufficient conditions for a vector space $V(F)$ to be a direct sum of its two sub spaces W_1 and W_2 are: एक सदिश समष्टि $V(F)$ को उसकी दो उपसमष्टियों W_1 व W_2 का सीधा योग होने के लिए निम्न आवश्यक एवं पर्याप्त शर्तें हैं:

(i) $V=W_1+W_2$ (ii) $W_1 \cap W_2=\{0\}$

Section-C

4. (a) If V is the vector space of all $n\times n$ matrices over the field F and B be a fixed matrix of V, then show that the mapping $T:V\to V$, defined by $T(A)=AB-BA\ \forall\ A\in V$ is a linear transformation. यदि V एक क्षेत्र F पर सभी $n\times n$ क्रम की आव्यूहों की सदिश समष्टि है तथा V की B एक स्थिर आव्यूह है, तब दर्शाइए कि प्रतिचित्रण $T:V\to V$, जो $T(A)=AB-BA\ \forall\ A\in V$ द्वारा परिभाषित है, एक रेखीय रूपान्तरण है।

(b) If V be a vector space over the field F and $S\subseteq V$, then show that $S^\circ=[L(S)]^\circ$.

यदि V क्षेत्र F पर एक सदिश समष्टि है तथा $S\subseteq V$, तब दर्शाइए कि $S^\circ=[L(S)]^\circ$ है।

5. Find the dual basis of the basis set: $B=\{(1,-1,3),(0,1,-1),(0,3,-2)\}$ for $V_3(R)$.

$V_3(R)$ के लिए बेसिस समुच्चय: $B=\{(1,-1,3),(0,1,-1),(0,3,-2)\}$ की द्वैत बेसिस ज्ञात कीजिए।

Section-D

6. (a) Find the inverse of the following matrix by using E-transformation :
निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम E-रूपान्तरण का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

(b) Apply rank test to examine the following equations are consistent or not, and if consistents, then find complete solution. कोटि परीक्षण का प्रयोग करते हुए जाँचिए कि निम्नलिखित समीकरण अनुरूप हैं अथवा नहीं, और यदि अनुरूप हैं, तो सम्पूर्ण हल ज्ञात कीजिए:

$2x-y+3z=8, -x+2y+z=4, 3x+y-4z=0$

7. (a) Prove that two vectors α and β in a real inner product space are orthogonal if and only if: सिद्ध कीजिए कि किसी वास्तविक आन्तरिक गुणन समष्टि के दो सदिश α तथा β लम्बवत् होंगे, यदि और केवल यदि:

$$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$$

(b) If α and β are vectors in a real inner product space, and if $\alpha+\beta$ is orthogonal to $\alpha-\beta$, then prove that $\|\alpha\|=\|\beta\|$. Interpret the result geometrically. यदि α तथा β किसी वास्तविक आन्तरिक गुणन समष्टि के सदिश हैं, तथा $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ पर लम्बवत् हों, तो सिद्ध कीजिए कि $\|\alpha\|=\|\beta\|$ होता है। परिणाम की ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

Section-E

8. (a) Show that the following matrix satisfies Cayley-Hamilton theorem:
दर्शाइए कि निम्नलिखित आव्यूह कैले-हेमिल्टन प्रमेय को सन्तुष्ट करती है:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

(b) Find the rank of the following matrix: निम्नलिखित आव्यूह की कोटि ज्ञात कीजिए:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 11 & 6 \end{bmatrix}.$$

9. (a) Write down the matrix of the following quadratic form and verify that is can be written matrix product $X^T AX$: निम्नलिखित द्विघातीय रूप की आव्यूह को लिखिए तथा जाँच कीजिए कि इसे आव्यूहों का गुणा $X^T AX$ लिखा जा सकता है: $x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 - x_1x_2 + 4x_2x_3 - 3x_3x_1$.

Scanned with CamScanner