DREAM TOPPER
Best E-learning Platform
Download pdf..
Www.dreamtopper.in
SACHIN DAKSH

B.A./B.Sc. II Year Examination, 2013 (*Unified Syllabus*)
MATHEMATICS - IV
(Linear Algebra and Matrices)

Time: 3 Hours] (AB-226) [M.M: B.A. 33 / B.Sc. 65

Note: This paper is divided into two Section-A and B. Section-A contains Short Answer Questions and Section-B contains Descriptive Answer Questions. Attempt both the Sections as per instructions. इस प्रश्न-पत्र को दो खण्डों-अ तथा ब में विभाजित किया गया है। खण्ड-अ में लघु उत्तरीय प्रश्न तथा खण्ड-ब में विस्तृत उत्तरीय प्रश्न हैं। सभी खण्डों को निर्देशानुसार हल कीजिए।

Section-A

Note: This Section has one question. This question contains ten parts. All parts are compulsory.
इस खण्ड में एक प्रश्न है। इस प्रश्न के दस भाग हैं। सभी भाग अनिवार्य हैं।

1. (i) Let R be a field of real numbers, show that the set $W=\{(x, 2y, 3z) : x, y, z \in R\}$ is a subspace of $V_3(R)$.

यदि R वास्तविक संख्याओं का एक फील्ड है तो सिद्ध करिए कि समुच्चय $W=\{(x, 2y, 3z) : x, y, z \in R\}$ $V_3(R)$ का एक उप अन्तरिक्ष है।

(ii) Show that the set $S=\{(1, 2), (3, 4)\}$ forms a basis of R^2.

दिखाइए कि समुच्चय $S=\{(1, 2), (3, 4)\}$ R^2 का एक बेसिस बनाता है।

(iii) If U (F) and V (F) are two vector spaces and T is a linear transformation from U into V then the null space of T is a subspace of U. यदि U (F) तथा V (F) दो सदिश अन्तरिक्ष है तथा T, U से V पर एक रेखीय प्रतिचित्रण है तो T का शून्य अन्तरिक्ष U का उपअन्तरिक्ष होगा।

(iv) Prove that the following matrix A is Hermitian matrix.
सिद्ध करो कि निम्नलिखित आव्यूह A एक हरमीशियन आव्यूह है।

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2-3i & 3+5i \\ 2+3i & 5 & i \\ 3-5i & -i & 7 \end{bmatrix}$$

(v) Let V be an inner product space over F and let $\alpha, \beta \in V$ then prove that :
यदि V, F के ऊपर एक आन्तरिक गुणन अन्तरिक्ष है तथा $\alpha, \beta \in V$ तो सिद्ध करिये:
$\|\alpha+\beta\|^2 + \|\alpha-\beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$

(vi) Let f be a bilinear form on R^2 defined by: यदि f एक R^2 पर द्विरेखीय फॉर्म है जो कि इस प्रकार परिभाषित है:
$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$ find the matrix of f in the basis. f का आव्यूह निम्नलिखित बेसिस में ज्ञात करिए:
$\{(1, 0), (0, 1)\}$

(vii) Prove that following matrix is unitory. सिद्ध करिए निम्नलिखित आव्यूह यूनिटरी है:

$$A=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$$

(viii) Define the rank of a matrix. किसी आव्यूह के रैंक को परिभाषित कीजिए।

(ix) Determine the eigen values of the following matrix: निम्नलिखित आव्यूह के ईगन मान ज्ञात करिये।

$$A=\begin{bmatrix} a & h & g \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & c \end{bmatrix}$$

(x) Write down the quadratic form corresponding to the following matrix:
निम्नलिखित आव्यूह के संगत द्विघातीय स्वरूप को लिखिए-

Scanned with CamScanner

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 5 & 1 & 6 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Section-B

Note: This Section is divided into four Units. Each Unit contains two questions. Attempt any one question from each Unit. Answer must be descriptive. Each question carries 5/10 marks. इस खण्ड को चार इकाइयों में विभाजित किया गया है। प्रत्येक इकाई में दो प्रश्न हैं। प्रत्येक इकाई में से कोई एक प्रश्न हल कीजिए। विस्तृत उत्तर अपेक्षित है। प्रत्येक प्रश्न 5/10 अंक का है।

Unit-I

2. (a) If S and T are two subsets of a vector space V, then prove that:
यदि S तथा T किसी सदिश अन्तरिक्ष V के दो उपसमुच्चय है तो सिद्ध करिये:
(i) $S \subseteq T \Rightarrow L(S) \subseteq L(T)$
(ii) $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$

(b) Show that the three vectors (1, 1, -1), (2, -3, 5) and (-2, 1, 4) of R^3 are Linearly Independent.
दिखाइए R^3 के तीन सदिश (1, 1, -1), (2, -3, 5) एवं (-2, 1, 4) रेखीय अनिर्भर हैं।

3. (a) The linear sum of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space V(F) is generated by their union, i.e.
किसी वेक्टर स्पेस V(F) के दो उपस्पेसों W_1 तथा W_2 का रेखीय योग उनके यूनियन द्वारा जनित होता है अर्थात्
$W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2)$

(b) Show that the set written below: दर्शाइए निम्नलिखित समुच्चय:
$S=\{(1,i,0),(2i,1,1),(0,1+i,1-i)\}$ is a basis of $V_3(C)$. $V_3(C)$ का एक बेसिस है।

Unit-II

4. (a) If U(F) and V(F) are two vector spaces and T is a linear transformation from U into V then the range of T is a subspace of V. यदि U (F) तथा V (F) दो वेक्टर स्पेस हैं तथा T, U से V पर एक रेखीय प्रतिचित्रण है तो सिद्ध करो T का रेन्ज V का उपस्पेस है।

(b) Show that the mapping defined below is a linear transformation:
दर्शाइए निम्नलिखित प्रतिचित्रण एक रेखीय ट्रांसफॉर्मेसन है:
$T: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ Where $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, a_1 - a_3)$

5. (a) Let T be a linear transformation on the vector space $V_2(F)$ defined by T (a, b) = (a, 0) write the matrix of T relative to the standard ordered basis of $V_2(F)$. यदि T एक $V_2(F)$ पर रेखीय ट्रांसफॉर्मेसन है जो कि इस प्रकार परिभाषित है T (a, b) = (a, 0) तो $V_2(F)$ के किसी मानक क्रमित बेसिस के सापेक्ष T का आव्यूह लिखिए

(b) Find the dual basis of the following basis set for $V_3(R)$:
$V_3(R)$ के लिए निम्नलिखित बेसिस समुच्चय का ड्यूवल बेसिस निकालिए:
$B = \{(1,-1,3), (0,1,-1), (0,3,-2)\}$

Unit-III

6. (a) If α, β are vectors in an inner product space V, prove that:
यदि आन्तरिक गुणन स्पेस V में α, β सदिश है तो सिद्ध कीजिए: $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$

(b) If W_1 and W_2 are subspaces of a finitedimensional inner product space then prove that:
यदि W_1 तथा W_2 किसी परिमित आयामी आन्तरिक गुणन स्पेस के उपस्पेस है तो सिद्ध करिए:
$(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

7. (a) Find the inverse of the following matrix by using E-transformations:
निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम E-ट्रांसफोरमेसन का प्रयोग करके ज्ञात करिए-

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

(b) Find that real value of λ, for which the following equations have non-zero solutions:
λ का वह वास्तविक मान ज्ञात करिये जिसके लिए निम्नलिखित समीकरणों नोन-जीरो हल रखती हों:

$x+2y+3z=\lambda x,\ 3x+y+2z=\lambda y,\ 2x+3y+z=\lambda z$

Unit-IV

8. (a) Write the matrix A of the following quadratic form: निम्नलिखित द्विघातीय फॉर्म का आव्यूह लिखिये:

$6x^2+35y^2+11z^2+4zx$

Hence find the Eigen values of A and determine the Value class of the given quadratic form.
अत: A के ईगन मान ज्ञात करिए तथा दिये गये द्विघातीय फार्म का वैल्यू क्लास निकालिए।

(b) Show that every square matrix is uniquely expressible as the sum of a symmetric matrix and a skew-symmetric matrix. दिखाइए कि प्रत्येक वर्ग आव्यूह एक सममित आव्यूह व एक स्क्यू-सममित आव्यूह के योग के रूप में अद्वितीय रूप में प्रदर्शनीय होता है।

9. (a) Show that the following matrix statisfies the Cayley-Hamilton theorem:
दर्शाइए कि निम्नलिखित आव्यूह कैलेय-हैमिलटन प्रमेय को सन्तुष्ट करता है:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) Reduce the following matrix to Normal form and find its rank:
निम्नलिखित आव्यूह को नॉर्मल रूप में परिवर्तित करिए तथा इसका रैंक निकालिए:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Scanned with CamScanner